Серия 31. Неравенства, дополнительные задачи

1. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ — положительные числа. Введём обозначения:

$$q = \sum_i a_i b_i, S_a = \sum_i a_i^2, S_b = \sum_i b_i^2.$$

Докажите, что для любого положительного λ выполнено неравенство

$$2q \leqslant \lambda S_a + \frac{1}{\lambda} S_b.$$

Выведите из этого неравенство Коши-Буняковского:

$$q \leqslant \sqrt{S_a}\sqrt{S_b}.$$

2. Для положительных $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_n$ докажите неравенство

$$(a_1 b_1 c_1 + \cdots + a_n b_n c_n)^3 \leqslant \left(a_1^3 + \cdots + a_n^3\right)\left(b_1^3 + \cdots + b_n^3\right)\left(c_1^3 + \cdots + c_n^3\right).$$

3. Для произвольных положительных a, b докажите неравенство:

$$\sqrt{a^2 - a + 1} \cdot \sqrt{b^2 - b + 1} + \sqrt{a^2 + a + 1} \cdot \sqrt{b^2 + b + 1} \geqslant 2(a + b).$$

4. **Турнир Городов 2010.** Имеется многоугольник. Для каждой стороны поделим её длину на сумму длин всех остальных сторон. Затем сложим все получившиеся дроби. Докажите, что полученная сумма будет всегда больше 1 и меньше 2.