Серия 30. Рекуррентные сюжеты

1. Найдите явную формулу для a_n, если
(a) $a_n = a_{n-1} + 12a_{n-2}$; $a_0 = 3$, $a_1 = 5$;
(b) $a_n = 3a_{n-1} - 4a_{n-3}$; $a_0 = 4$, $a_1 = 7$, $a_2 = 21$;
(c) *последовательность Фибоначчи* $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$; $F_0 = 0$, $F_1 = 1$.

2. **(a)** Найдите линейную рекуррентную формулу минимального порядка для последовательности $a_n = n^2$.
(b) Найдите линейную рекуррентную формулу минимального порядка для последовательности $b_n = \cos(n\pi/6)$.

3. Сколькими способами можно представить число n в виде суммы положительных нечётных слагаемых? (Представления, различающиеся порядком слагаемых, считаются различными.)

4. Обозначим через B_n число способов разбить брусок $2\times 2\times n$ на бруски $1\times 1\times 2$. Выразите B_n через B_{n-1}, B_{n-2} и B_{n-3}.

5. Лягушка сидит в левой клетке прямоугольника 1×4. За один ход она может прыгнуть в соседнюю клетку. Сколько у неё есть маршрутов длины n?

6. В нулевой момент времени в вершине A шестиугольника $ABCDEF$ сидит лягушка. Каждую секунду лягушка перепрыгивает в одну из соседних вершин.
(a) Сколькими способами она может попасть из A в C за 20 прыжков?
(b) Тот же вопрос, но при условии, что ей нельзя прыгать в D (там находится мина).

7. Турнир по боксу проходил по системе «проигравший выбывает». Бои шли последовательно. Известно, что у участников каждого боя число предыдущих побед отличалось не более чем на 1. Известно, что победитель провёл n боёв. Какое наименьшее число боксёров могло участвовать в турнире?

8. Археолог нашёл n золотых монет. Из старых текстов он выяснил, что одна из них фальшивая и она легче подлинных. В распоряжении археолога есть только платные весы. Если одна чаша перевешивает другую, то археолог должен будет заплатить 1 фунт и 2 фунта в случае равновесия. При каком наибольшем n можно найти фальшивую монету, заплатив не более 10 фунтов?

9. Археолог нашёл k золотых монет. Из старых текстов он выяснил, что одна из них фальшивая и она легче подлинных. В распоряжении археолога есть только платные весы. Если левая чаша перевесит, то надо заплатить 2 фунта, а при любом другом исходе — 1 фунт. При каком наибольшем k можно найти фальшивую монету, заплатив не более 10 фунтов?