

## Разнобой неравенства

- 1. Беларусь 2011.** Положительные числа  $a, b, c$  таковы, что  $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ .  
 Докажите, что

$$a + b + c \geq ab + bc + ca.$$

- 2.** Пусть  $x \geq y \geq z \geq 0$ , а  $a \geq b \geq c$  – вещественные числа. Докажите, что

$$x(a - b)(a - c) + y(b - c)(b - a) + z(c - a)(c - b) \geq 0.$$

Докажите также, что это останется верным, если  $0 \leq x \leq y \leq z$ .

- 3.** Для вещественных чисел  $a, b, c$  докажите неравенство

$$a^4 + b^4 + c^4 + abc(a + b + c) \geq ab(a^2 + b^2) + bc(b^2 + c^2) + ca(c^2 + a^2).$$

- 4. IMO 2000.** Для положительных  $a, b, c$  выполнено, что  $abc = 1$ . Докажите неравенство:

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right) \left(b - 1 + \frac{1}{c}\right) \left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1.$$

- 5. Беларусь.** Пусть  $m, n$  – натуральные числа. Докажите неравенство:

$$2\left|\sqrt{2}m - \sqrt{5}n\right| > \frac{5}{2m + 3n}.$$

- 6.** Даны положительные числа  $a, b, c$ . Докажите неравенство:

$$\sqrt{a + \sqrt[3]{b + \sqrt[4]{c}}} \geq \sqrt[32]{abc}.$$

- 7.** Разложите выражения  $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$  и  $(x^2y + y^2z + z^2x) - (xy^2 + yz^2 + zx^2)$  на множители. Какие условия на числа  $x, y, z$  необходимы и достаточны, чтобы эти выражения были положительны?
- 8. Вьетнам.** Про вещественные числа  $x, y, z$  известно, что  $x \geq y \geq z \geq 0$ .  
 Докажите неравенство

$$x^3y^2 + y^3z^2 + z^3x^2 \geq xyz(x^2 + y^2 + z^2).$$