Серия 27. Теорема Кронекера

1. Дано положительное иррациональное число α, меньшее 1. Кузнечик прыгает по окружности длины 1. За каждую секунду он прыгает по часовой стрелке на дугу длины α.
(a) Докажите, что когда-нибудь он окажется на расстоянии меньше чем $1/1000$ от своего исходного положения (расстояние считается по окружности).
(b) Докажите, что кузнечик рано или поздно посетит любую наперёд выбранную дугу окружности. Верно ли, что он посетит любую наперёд заданную точку окружности?
(c) (*Теорема Кронекера*). Докажите, что если $\alpha > 0$ — иррациональное число, то произвольный интервал (a, b) числовой прямой содержит число вида $n\alpha - m$, где m, n — неотрицательные целые числа. (Иными словами, множество значений выражения $n\alpha - m$ *всюду плотно* на числовой прямой).

2. Кузнечик прошел курсы повышения квалификации и теперь он умеет делать два прыжка: с длинами $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$ в обе стороны. Теперь кузнечик готов прыгать по прямой. Докажите, что он сможет попасть в любой отрезок на прямой.

3. В каждой точке координатной плоскости с целыми координатами сидит круглый дятел радиуса $r > 0$. У дятла в точке $(0, 0)$ есть ружьё. Докажите, что в каком бы направлении он не стрельнул, пуля попадёт в другого дятла.

4. (*Теорема Дирихле*) **(a)** Докажите, что для любых вещественного α и натурального N найдутся такие целые m и $0 < n \leqslant N$, что $|n\alpha - m| < 1/N$.
(b) Докажите, что для любых вещественных $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ и для любого натурального N существуют такие целые $m_1, \ldots, m_k$ и $0 < n \leqslant N^k$, что одновременно выполнены неравенства

$$|n\alpha_1 - m_1| < \frac{1}{N}, |n\alpha_2 - m_2| < \frac{1}{N}, \ \ldots, \ |n\alpha_k - m_k| < \frac{1}{N}.$$

5. **(a)** Докажите, что степень тройки с натуральным показателем может начинаться на любую комбинацию цифр.
(b) Докажите, что степень двойки может начинаться на те же 2017 цифр, что и оканчиваться (конечно, число при этом должно быть минимум 4034-значное).

6. На прямой конечное число отрезков суммарной длиной 2.41 покрашено чёрным, в одной из черных точек сидит кузнечик. Он умеет прыгать по прямой на 1 влево или на $\sqrt{2}$ вправо. Докажите, что он не сможет всё время оставаться на черной части прямой.

7. Докажите, что при любом вещественном α число $[\alpha n^2]$ чётно для бесконечного множества натуральных чисел n.