

## Серия 25. Системы линейных уравнений

Рассмотрим систему линейных уравнений (далее СЛУ):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Все коэффициенты  $a_{ij}$  и  $b_i$  являются элементами некоторого поля  $\mathbb{K}$  (в этом листике  $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$  либо  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ). Две СЛУ будем называть *эквивалентными*, если у них в точности совпадают множества решений. СЛУ называется *однородной*, если все  $b_i = 0$ .

1. Решите методом Гаусса следующие системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x + 3y + z = 1, \\ 2x + 7y + 3z = 2, \\ -x - 3y = 3, \\ 3x + 10y + 5z = 7. \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y + 3z = 6, \\ 4x + 5y + 6z = 15, \\ 7x + 8y + 9z = 24. \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 5, \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 7x_3 + 4x_4 = 5. \end{cases}$$

2. Проанализировав метод Гаусса, докажите следующие утверждения о СЛУ:

- (а) Если в **однородной** СЛУ неизвестных больше, чем уравнений, то она имеет решение, отличное от нулевого (следовательно, бесконечно много решений: ненулевое решение можно домножать на любую константу).
- (б) Некоторая **однородная** СЛУ с одинаковым числом уравнений и неизвестных имеет единственное решение. Докажите, что любая **неоднородная** СЛУ с такой же левой частью имеет единственное решение.
- (в) Предположим, что  $X_0$  — множество решений некоторой **однородной** СЛУ<sub>0</sub>. Докажите, что множество решений  $X$  некоторой **неоднородной** СЛУ<sub>1</sub> с такой же левой частью либо пусто, либо представляется в виде  $X = X_0 + \mathbf{x}$ , где  $\mathbf{x}$  — произвольное решение СЛУ<sub>1</sub>.
- (г) Докажите, что если у СЛУ с рациональными коэффициентами существует вещественное решение, то у неё есть хотя бы одно рациональное решение.
3. У Пети было 10 яблок, вес каждого — вещественное положительное число. Он проделал с ними несколько взвешиваний на чашечных весах без гирь, и каждый раз получал равенство. Докажите, что Петя сможет приписать каждому яблоку цену в целое число рублей так, чтобы при каждом из проведенных взвешиваний цены чаш были одинаковы.
4. (*Дискретное уравнение теплопроводности*) Имеется клетчатая таблица  $(k+2) \times (l+2)$ . В её граничных клетках («в рамочке») расставлены произвольные вещественные числа. Докажите, что в клетках центрального прямоугольника  $k \times l$  можно единственным образом расставить числа так, чтобы каждое из этих  $kl$  чисел равнялось среднему арифметическому своих четырёх соседей по стороне.
5. Внутри отрезка  $[0, 1]$  выбрали  $n$  различных точек. *Отмеченной* точкой назовём одну из  $n$  выбранных или конец отрезка. Оказалось, что любая из внутренних  $n$  точек является серединой какого-то отрезка с вершинами в отмеченных. Докажите, что все точки рациональные.
6. Даны три однородных квадратичных многочлена с вещественными коэффициентами:  $P(u, v)$ ,  $Q(u, v)$  и  $R(u, v)$  (т. е. каждый из них имеет вид  $Au^2 + Buv + Cv^2$ ). Докажите, что существует ненулевой однородный квадратичный многочлен  $F(x, y, z)$  с вещественными коэффициентами такой, что  $F(P(u, v), Q(u, v), R(u, v)) = 0$  при всех  $u$  и  $v$ .
7. Имеется 101 корова. Известно, что любые 100 коров можно разбить на два стада одинакового веса, по 50 коров в каждом. Докажите, что все коровы весят одинаково, если известно, что
- (а) масса каждой коровы целое число граммов (масса коровы может быть отрицательной);
- (б) масса каждой коровы рациональное число граммов;
- (в) масса каждой коровы действительное число граммов.
8. В вершинах правильного 101-угольника расставлены единицы. За один ход разрешается выбрать четыре подряд стоящие числа, вычесть по 1 из двух средних и прибавить по 1 к двум крайним. Можно ли не более чем за 10000 таких ходов получить расстановку, в которой все числа, кроме одного, равны нулю?