

## Серия 23. Разнобой-3

1. Квадратный трёхчлен  $f(x)$  имеет два различных корня. Оказалось, что для любых вещественных чисел  $a$  и  $b$  верно неравенство  $f(a^2 + b^2) \geq f(2ab)$ . Докажите, что хотя бы один из корней трёхчлена — отрицательный.
2. Круг разделен на 2019 секторов, и в каждом написано натуральное число. В один из секторов ставится фишка. Каждым ходом прочитывается число в секторе, где стоит фишка, она сдвигается на это число секторов по часовой стрелке, и там, где она остановилась, число увеличивается на 1. Докажите, что через некоторое число ходов все числа в секторах станут больше миллиона.
3. При каком наибольшем  $n$  возможно разложить 111 монет по клеткам квадратной доски  $n \times n$  так, чтобы количества монет в любых двух соседних по стороне клетках отличались ровно на 1? (В клетках может быть по несколько монет или не быть их вообще.)
4. Положительные числа  $a, b$  и  $c$  таковы, что  $abc = 1$ . Докажите, что

$$\frac{1 + ab^2}{c^3} + \frac{1 + bc^2}{a^3} + \frac{1 + ca^2}{b^3} \geq \frac{18}{a^3 + b^3 + c^3}.$$

5. Будем называть *рамкой* клетчатый квадрат  $n \times n$ , из которого удалили квадрат  $(n - 2) \times (n - 2)$  с тем же центром. Клеточки рамки можно красить в белый и в чёрный цвета. Назовем раскраску рамки *хорошей*, если рамку можно разрезать на доминошки так, что каждая доминошка состоит из клеточек разных цветов. Сколько существует хороших раскрасок?
6. Ваня задумал два положительных числа  $x$  и  $y$ . Он записал числа  $x + y$ ,  $x - y$ ,  $xy$  и  $x/y$  и показал Пете, но не сказал, какое число какой операцией получено. Может ли Петя однозначно восстановить  $x$  и  $y$ ?
7. Целые числа  $m$  и  $n$  таковы, что  $0 \leq m \leq 2n$ . Докажите, что число  $2^{2n+2} + 2^{m+2} + 1$  является точным квадратом тогда и только тогда, когда  $m = n$ .
8. Имеется доска  $100 \times 100$ , все клетки которой покрашены в три цвета. Разрешается перекрасить любой квадратик  $2 \times 2$  в тот цвет, который в нём преобладает; а если такого нет, то в тот цвет, которого нет в квадратике. Докажите, что весь квадрат можно перекрасить в один цвет.