Серия 19. Лемма об уточнении показателя

Для простого p и целого n будем символом $ord_p(n)$ обозначать степень вхождения простого множителя p в разложение числа n на простые множители.

Лемма об уточнении показателя. *Пусть a и b — различные целые числа, k — натуральное, p — простое, не являющееся делителем a, и пусть выполнено одно из условий 1 или 2. Тогда $ord_p(a^k - b^k) = opd_p(a-b) + ord_p(k)$.*
Условие 1: $p \neq 2$ и $a-b$ делится на p.
Условие 2: $p = 2$ и $a-b$ делится на 4.

Следствие. *Пусть k — нечетное, p — простое, a, b не делятся на p и $a+b$ делится на p. Тогда $ord_p(a^k + b^k) = ord_p(a+b) + ord_p(k)$.*

1. Даны простое число p, натуральные k и s, различные целые a и b, такие, что $a-b$ делится на p, причём a и b не делятся на p.
(a) Докажите, что $ord_p(a^p - b^p) > ord_p(a-b)$.
(b) Докажите, что $ord_p(a^s - b^s) = ord_p(a-b)$, если s не кратно p.
(c) Докажите, что $ord_p(a^k - b^k) \geqslant ord_p(a-b) + ord_p(k)$.
(d) Докажите, что если $p > 2$, то $ord_p(a^p - b^p) = ord_p(a-b) + 1$.
(e) Докажите лемму об уточнении показателя.

2. Найдите показатель числа
(a) 2017
(b) 2019
по модулю 2^{2017}.

3. Сколькими нулями оканчивается число $4^{5^6} + 6^{5^4}$?

4. Докажите, что показатель числа 2 по модулю 3^n равен $\varphi(3^n)$.

5. Решите в натуральных числах уравнение $3^x = 2^x y + 1$.

6. Пусть x, y, p, n, k — натуральные числа, причем n — нечетное, а p — нечетное простое. Докажите, что если $x^n + y^n = p^k$, то n является степенью числа p.

7. **(a)** Докажите, что для любого натурального $a > 2$ найдется такое натуральное n, что $a^n - 1$ делится на n^2.
(b) Верно ли это утверждение для $a = 2$?

8. Найдите все натуральные n, для которых существуют такие натуральные числа x, y, k, что НОД$(x, y) = 1, k > 1$ и $3^n = x^k + y^k$.