Серия 17. Интерполяция

1. Решить уравнение $c\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+b\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+a\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}=x$

2. Два корабля двигаются с постоянными скоростями. Расстояния между ними, измеренные в 12, 14 и 15 часов, равнялись 5, 7 и 2 километра соответственно. Каким было расстояние между кораблями в 13 часов?

3. Докажите, что если $f(x)$ — многочлен, степень которого меньше n, то дробь $\frac{f(x)}{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}$ (где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — произвольные попарно различные числа) можно представить в виде суммы вида $\frac{a_1}{x-x_1}+\frac{a_2}{x-x_2}+\ldots+\frac{a_n}{x-x_n}$, где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — константы.

4. Даны различные действительные числа $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$. Решите систему

$$\begin{cases} \frac{x_1}{a_1-b_1}+\frac{x_2}{a_1-b_2}+\ldots+\frac{x_n}{a_1-b_n}=1, \\ \frac{x_1}{a_2-b_1}+\frac{x_2}{a_2-b_2}+\ldots+\frac{x_n}{a_2-b_n}=1, \\ \ldots \\ \frac{x_1}{a_n-b_1}+\frac{x_2}{a_n-b_2}+\ldots+\frac{x_n}{a_n-b_n}=1. \end{cases}$$

5. Дана последовательность Фибоначчи $F_0=0$, $F_1=1$, $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$. Многочлен $P(x)$ степени 1007 таков, что $P(k)=F_k$ при $k\in\{1009,\ldots,2016\}$. Найдите $P(2017)$.

6. Алиса задумала многочлен десятой степени (с действительными коэффициентами), а Боб хочет его угадать. Боб может за один вопрос назвать любые десять действительных чисел, после чего Алиса говорит Бобу значение её многочлена при одном из названных значений переменной (но не говорит, какое именно число из названных она подставила).
   (a) Докажите, что Боря может определить многочлен Алисы.
   (b) За какое наименьшее число ходов Боря может это сделать?

7. Про многочлен $p(x)$ степени n известно, что $|p(x)|\leqslant 1$ при $0\leqslant x\leqslant 1$. Докажите, что $p(-1/n)\leqslant 2^{n+1}-1$.

8. Шесть членов команды Нарнии на кубок Колмогорова отбираются из 13 кандидатов. На отборочной олимпиаде кандидаты набрали $a_1, a_2, \ldots, a_{13}$ баллов. Руководитель команды заранее выбрал шесть кандидатов и теперь хочет, чтобы в команду попали именно они. С этой целью он подбирает многочлен $P(x)$ и вычисляет *творческий потенциал* каждого кандидата по формуле $c_i=P(a_i)$. При каком минимальном n он заведомо сможет подобрать такой многочлен $P(x)$ степени не выше n, что творческий потенциал любого из его шести кандидатов окажется строго больше, чем у каждого из семи оставшихся?