# Серия 14. Многочлены

**1.** Дан многочлен $P(x)$ с вещественными коэффициентами нечётной степени. Докажите, что уравнение $P(P(x)) = 0$ имеет не меньше различных вещественных корней, чем уравнение $P(x) = 0$.

**2.** Последовательность многочленов $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_n(x), \ldots$ определена условиями: $P_0(x) = x$ и $P_n = P_{n-1}(x-1) \cdot P_{n-1}(x+1)$ при всех натуральных $n$. Найдите наибольшее натуральное $k$, для которого $P_{2018}(x)$ делится на $x^k$.

**3.** Вася перемножил несколько квадратных трёхчленов вида $x^2 + px + q$ ($p$ и $q$ — вещественные) и в результате получил многочлен, все коэффициенты которого положительны. Докажите, что хотя бы у одного из исходных трёхчленов все коэффициенты были также положительны.

**4.** Докажите, что если многочлен $P(x)$ степени $n$ с вещественными коэффициентами принимает целые значения в точках $x = 0, 1, 2, \ldots, n$, то он принимает целые значения во всех целых точках.

**5.** Дано $n$ вещественных чисел, $p$ — их произведение. Разность между $p$ и каждым из этих чисел — целое нечётное число. Докажите, что все данные $n$ чисел иррациональны.

**6.** Дано натуральное число $k$. Для каждого натурального $n$ обозначим через $f(n)$ наименьшее значение выражения $\left|\pm 1^k \pm 2^k \pm \ldots \pm n^k\right|$ по всем расстановкам знаков. Докажите, что функция $f(n)$ периодична, начиная с некоторого места.

**7.** Даны приведённые квадратные трёхчлены $f(x)$ и $h(x)$, графики которых имеют общую точку, и $g(x)$ — многочлен, отличный от константы (все коэффициенты многочленов $f, g, h$ — вещественные). Оказалось, что $f(g(h(x))) = h(g(f(x)))$ для всех вещественных $x$. Докажите, что $f(x) = h(x)$.

**8.** Существуют ли два многочлена с целыми коэффициентами такие, что у каждого из них есть коэффициент, модуль которого больше 2015, но у произведения этих двух многочленов модули всех коэффициентов не превосходят 1?