Серия 10. Однородные симметрические неравенства

1. Для положительных a, b, c докажите неравенство:

$$a^5 + b^5 + c^5 \geqslant \frac{1}{2} \cdot (a^3b^2 + b^3c^2 + c^3a^2 + a^2b^3 + b^2c^3 + c^2a^3).$$

2. Положительные числа a, b, c таковы, что $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Докажите, что

$$a + b + c \geqslant ab + bc + ca.$$

3. Для положительных a, b, c, d докажите неравенство:

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4}} \geqslant \sqrt[3]{\frac{abc + bcd + cda + dab}{4}}.$$

4. Let a, b, c be positive real numbers with $abc = 1$. Prove that

$$\frac{1}{a^3(b + c)} + \frac{1}{b^3(c + a)} + \frac{1}{c^3(a + b)} \geqslant \frac{3}{2}.$$

5. Для положительных a, b, c верно, что $a + b + c = ab + bc + ca$. Докажите, что

$$a + b + c + 1 \geqslant 4abc.$$

6. Положительные числа x, y, z связаны соотношением $xyz = 1$. Докажите, что

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^5 - z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \geqslant 0.$$

7. Положительные числа a, b, c в сумме дают 3. Докажите неравенство

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant 1 + 2\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3abc}}.$$

Определения и формулировки

Однородным симметрическим многочленом, порождённым упорядоченным набором целых неотрицательных чисел $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$, называют выражение

$$T(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)}^{a_1} \cdot x_{\sigma(2)}^{a_2} \cdot \ldots \cdot x_{\sigma(n)}^{a_n},$$

где суммирование ведётся по множеству S_n всех перестановок $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Примеры:

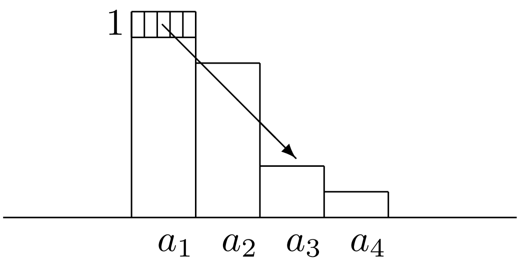
$T(3,2,1) = x^3y^2z + y^3z^2x + z^3x^2y + x^3z^2y + z^3y^2x + y^3x^2z;$
$T(1,1,0) = 2 \cdot (xy + yz + zx);$
$T(1,1,1) = 6 \cdot xyz.$

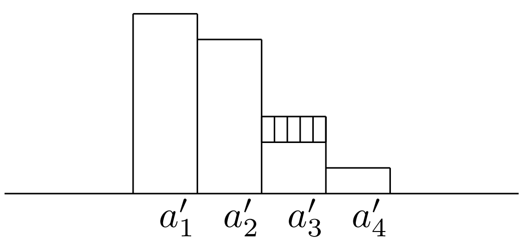
Предположим, что нам даны два упорядоченных набора целых неотрицательных чисел $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$ и $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n$. Будем говорить, что набор a_i *мажорирует* набор b_i (запись $a_i \succ b_i$), если диаграмму Юнга набора a_i можно преобразовать в диаграмму Юнга набора b_i с помощью нескольких операций сбрасывания кирпича, определённых ниже.

Операцией *сбросить кирпич* с места i на место j (где $1 \leqslant i < j \leqslant n$) назовём преобразование упорядоченного набора целых неотрицательных чисел a_i в набор a_i', заданное следующим образом:

$$(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, a_j, a_{j+1}, \ldots, a_n) \to$$
$$\to (a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i - 1, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, a_j + 1, a_{j+1}, \ldots, a_n).$$

Операция осуществима, только если новый набор a_i' сохраняет свою монотонность.





Неравенство Мюрхеда. Если $a_i \succ b_i$, то при всех положительных $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$T(a_1, a_2, \ldots, a_n) \geqslant T(b_1, b_2, \ldots, b_n).$$

Иногда, когда не помогает неравенство Мюрхеда, может помочь неравенство Шура.

Неравенство Шура. Для любого $k \in \mathbb{N}$ и любых положительных x_1, x_2, x_3

$$T(k+2, 0, 0) + T(k, 1, 1) \geqslant 2 \cdot T(k+1, 1, 0).$$