Серия 9. Разнобой по неравенствам, часть 2

1. Положительные числа a, b, c удовлетворяют условию $\dfrac{3}{abc} \geqslant a+b+c$. Докажите неравенство $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} \geqslant a+b+c$.

2. Сумма положительных чисел a, b, c, d равна 4. Докажите, что

$$\frac{a}{1+b^2c}+\frac{b}{1+c^2d}+\frac{c}{1+d^2a}+\frac{d}{1+a^2b} \geqslant 2.$$

3. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{a+c}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2.$$

4. Положительные числа a, b, c удовлетворяют равенству $abc=1$. Докажите неравенство

$$\frac{1}{1+b+c}+\frac{1}{1+c+a}+\frac{1}{1+a+b} \leqslant 1.$$

5. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство

$$108\cdot(ab+bc+ca) \leqslant \left(\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}\right)^4.$$

6. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \geqslant \frac{a+b+c}{3}.$$