

Серия 2. Подсчёт двумя способами и усреднение

0. По кругу расставлено 100 чисел. Сумма всех чисел равна 1. Может ли сумма любых семи подряд идущих чисел быть отрицательна?
1. На столе лежат 5 часов со стрелками. Разрешается любые несколько из них перевести вперёд. Для каждого часа время, на которое при этом их перевели, назовем *временем перевода*. Требуется все часы установить так, чтобы они показывали одинаковое время. За какое наименьшее суммарное время перевода это можно гарантированно сделать?
2. В классе 20 детей. Каждый день какие-то пары из них жмут друг другу руки, а какие-то нет. Известно, что всего за неделю было совершено 761 рукопожатие. Докажите, что можно выделить группу из семи человек так, чтобы между детьми из этой группы было совершено не менее 85 рукопожатий.
3. Стрелки полного ориентированного графа на $n^2 + 1$ вершине раскрашены в два цвета, причем одноцветных циклов нет. Докажите, что в графе существует простой одноцветный путь длины n .
4. На окружности отмечены $2n$ точек так, что никакие три хорды с концами в этих точках не пересекаются в одной точке, лежащей внутри окружности. Разобьем отмеченные точки на n пар, и в каждой паре соединим точки отрезком. Число точек пересечения проведенных n отрезков назовем *характеристикой* разбиения. Найдите среднее арифметическое характеристик по всем разбиениям.
5. У фокусника имеется ассистент. Фокусник выходит из зала, а зритель выкладывает в ряд 6 монет произвольным образом. После этого ассистент фокусника закрывает некоторые монеты бумажками так, что не видно, лежат они вверх орлами или решками. В итоге фокусник заходит и угадывает, как выглядит весь ряд. Какое наибольшее число монет может закрыть ассистент? (Это количество объявляется зрителям до начала конкурса).
6. (а) Можно ли разрезать какой-нибудь выпуклый четырехугольник на выпуклые пятиугольники? (б) Можно ли разрезать какой-нибудь выпуклый пятиугольник на выпуклые шестиугольники?
7. На доске выписаны в ряд n положительных чисел a_1, a_2, \dots, a_n . Вася хочет выписать под каждым числом a_i число $b_i \geq a_i$ так, чтобы для любых двух из чисел b_1, b_2, \dots, b_n отношение одного из них к другому было целым. Докажите, что Вася может выписать требуемые числа так, чтобы выполнялось неравенство

$$b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_n \leq 2^{(n-1)/2} \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n.$$