8 класс

Радикальная ось

30 марта 2019

1. Пусть A и B — две различные точки плоскости, $\lambda \in \mathbb{R}$.

а) Докажите, что на прямой AB найдется единственная точка X такая, что $AX^2 - BX^2 = \lambda$.

б) Докажите, что ГМТ плоскости X таких, что $AX^2 - BX^2 = \lambda$, является прямая, перпендикулярная AB.

2. а) Радикальная ось. Пусть ω_1 и ω_2 — неконцентрические окружности. Докажите, что ГМТ X таких, что $\deg(X, \omega_1) = \deg(X, \omega_2)$, является прямая, перпендикулярная линии центров ω_1 и ω_2.

б) Радикальный центр. Пусть ω_1, ω_2 и ω_3 — попарно неконцентрические окружности. Докажите, что радикальные оси ω_1 и ω_2, ω_2 и ω_3, ω_3 и ω_1 пересекаются в одной точке или попарно параллельны.

3. Докажите, что середины отрезков четырех общих касательных к двум непересекающимся кругам (двух внешних и двух внутренних) лежат на одной прямой.

4. На окружности ω с диаметром AB взята точка C. Точка H — основание перпендикуляра из C на AB. Обозначим через Ω окружность с центром в точке C и радиусом CH. Докажите, что общая хорда ω и Ω делит отрезок CH пополам.

5. Окружность, проходящая через вершины B и C трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$), пересекает боковые стороны трапеции в точках P и Q, а диагонали — в точках M и N. Докажите, что прямые AD, PQ и MN пересекаются в одной точке или параллельны.

6. Про шестиугольник $ABCDEF$ известно, что $AB = BC$, $CD = DE$, $EF = FA$ и $\angle A = \angle C = 90°$. Докажите, что $FD \perp BE$.

7. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $AB = BC$ и $AD = DC$. Точки K, L, M — середины отрезков AB, CD, AC соответственно. Перпендикуляр, опущенный из A на прямую BC, пересекается с перпендикуляром, опущенным из C на прямую AD, в точке F. Докажите, что $MF \perp KL$.

8. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AB, AC, BC в точках C_1, B_1, A_1 соответственно. Докажите, что средние линии треугольников A_1CB_1 и A_1BC_1, параллельные сторонам A_1B_1 и A_1C_1, а также серединный перпендикуляр к BC пересекаются в одной точке.

9. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1. Докажите, что точки пересечения пар прямых AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, CA и C_1A_1 лежат на одной прямой, перпендикулярной прямой, соединяющей ортоцентр и центр описанной окружности треугольника ABC.

8 класс

Радикальная ось

30 марта 2019

1. Пусть A и B — две различные точки плоскости, $\lambda \in \mathbb{R}$.

а) Докажите, что на прямой AB найдется единственная точка X такая, что $AX^2 - BX^2 = \lambda$.

б) Докажите, что ГМТ плоскости X таких, что $AX^2 - BX^2 = \lambda$, является прямая, перпендикулярная AB.

2. а) Радикальная ось. Пусть ω_1 и ω_2 — неконцентрические окружности. Докажите, что ГМТ X таких, что $\deg(X, \omega_1) = \deg(X, \omega_2)$, является прямая, перпендикулярная линии центров ω_1 и ω_2.

б) Радикальный центр. Пусть ω_1, ω_2 и ω_3 — попарно неконцентрические окружности. Докажите, что радикальные оси ω_1 и ω_2, ω_2 и ω_3, ω_3 и ω_1 пересекаются в одной точке или попарно параллельны.

3. Докажите, что середины отрезков четырех общих касательных к двум непересекающимся кругам (двух внешних и двух внутренних) лежат на одной прямой.

4. На окружности ω с диаметром AB взята точка C. Точка H — основание перпендикуляра из C на AB. Обозначим через Ω окружность с центром в точке C и радиусом CH. Докажите, что общая хорда ω и Ω делит отрезок CH пополам.

5. Окружность, проходящая через вершины B и C трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$), пересекает боковые стороны трапеции в точках P и Q, а диагонали — в точках M и N. Докажите, что прямые AD, PQ и MN пересекаются в одной точке или параллельны.

6. Про шестиугольник $ABCDEF$ известно, что $AB = BC$, $CD = DE$, $EF = FA$ и $\angle A = \angle C = 90°$. Докажите, что $FD \perp BE$.

7. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $AB = BC$ и $AD = DC$. Точки K, L, M — середины отрезков AB, CD, AC соответственно. Перпендикуляр, опущенный из A на прямую BC, пересекается с перпендикуляром, опущенным из C на прямую AD, в точке F. Докажите, что $MF \perp KL$.

8. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AB, AC, BC в точках C_1, B_1, A_1 соответственно. Докажите, что средние линии треугольников A_1CB_1 и A_1BC_1, параллельные сторонам A_1B_1 и A_1C_1, а также серединный перпендикуляр к BC пересекаются в одной точке.

9. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1. Докажите, что точки пересечения пар прямых AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, CA и C_1A_1 лежат на одной прямой, перпендикулярной прямой, соединяющей ортоцентр и центр описанной окружности треугольника ABC.