8 класс | Степень точки | 23 марта 2019

**Определение.** Пусть $\omega$ — окружность, $X$ — точка. Прямая $\ell$, проходящая через $X$, пересекает $\omega$ в точках $A$ и $B$. *Степенью точки* $X$ относительно окружности $\omega$ называется величина (не зависящая от прямой $\ell$)

$$\deg(X,\omega)=\begin{cases}+XA\cdot XB, & \text{если точка } X \text{ лежит вне } \omega;\\ -XA\cdot XB, & \text{если точка } X \text{ лежит внутри } \omega.\end{cases}$$

Если $X$ лежит вне $\omega$, то $\deg(X,\omega)$ есть квадрат длины касательной из $X$ к $\omega$.

**1.** Окружности $\omega$ и $\Omega$ пересекаются в точках $P$ и $Q$. Докажите, что прямая $PQ$ делит пополам общую внешнюю касательную $\omega$ и $\Omega$.

**2.** Пусть $\omega$ — окружность с центром $O$ и радиусом $R$, $X$ — произвольная точка. Докажите, что $\deg(X,\omega)=OX^2-R^2$.

**3.** В угол вписаны две окружности. Первая окружность касается одной из сторон угла в точке $K$, вторая касается другой стороны угла в точке $L$. Докажите, что прямая $KL$ высекает на окружностях равные хорды.

**4.** Постройте окружность, проходящую через две данные точки и касающуюся данной прямой.

**5.** Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями $AD$ и $BC$ пересекаются в точке $P$, причем $\angle APB<90^\circ$. Докажите, что длины отрезков касательных, проведенных из точки $P$ к окружностям, построенным на отрезках $AB$ и $CD$ как на диаметрах, равны.

**6.** На окружности $\omega$ выбраны точки $A,B,C$ так, что $AB=BC$. Касательные к $\omega$ в точках $A$ и $B$ пересекаются в точке $D$; $E$ — точка пересечения $DC$ и $\omega$. Докажите, что прямая $AE$ делит пополам отрезок $BD$.

**7.** В треугольнике $ABC$ отмечены середины $M$ и $N$ отрезков $BC$ и $CM$ соответственно. Описанная окружность треугольника $ABN$ вторично пересекает отрезок $AC$ в точке $S$. Докажите, что $\angle BAM=\angle MSN$.

**8.** В остроугольном треугольнике $ABC$ прямые $a$ и $b$ содержат высоты, проведенные из вершин $A$ и $B$ соответственно. Окружности $\omega_A$ и $\omega_B$ построены на отрезках $BC$ и $AC$ соответственно как на диаметрах. Прямая $a$ пересекает $\omega_A$ в точках $P$ и $Q$, прямая $b$ пересекает $\omega_B$ в точках $R$ и $S$. Докажите, что точки $P,Q,R,S$ лежат на одной окружности.

**9.** Окружность $\omega$ касается сторон угла $BAC$ в точках $B$ и $C$. Прямая $\ell$ пересекает отрезки $AB$ и $AC$ в точках $K$ и $L$ соответственно. Окружность $\omega$ пересекает $\ell$ в точках $P$ и $Q$. Точки $S$ и $T$ выбраны на отрезке $BC$ так, что $KS\parallel AC$ и $LT\parallel AB$. Докажите, что точки $P,Q,S$ и $T$ лежат на одной окружности.

8 класс | Степень точки | 23 марта 2019

**Определение.** Пусть $\omega$ — окружность, $X$ — точка. Прямая $\ell$, проходящая через $X$, пересекает $\omega$ в точках $A$ и $B$. *Степенью точки* $X$ относительно окружности $\omega$ называется величина (не зависящая от прямой $\ell$)

$$\deg(X,\omega)=\begin{cases}+XA\cdot XB, & \text{если точка } X \text{ лежит вне } \omega;\\ -XA\cdot XB, & \text{если точка } X \text{ лежит внутри } \omega.\end{cases}$$

Если $X$ лежит вне $\omega$, то $\deg(X,\omega)$ есть квадрат длины касательной из $X$ к $\omega$.

**1.** Окружности $\omega$ и $\Omega$ пересекаются в точках $P$ и $Q$. Докажите, что прямая $PQ$ делит пополам общую внешнюю касательную $\omega$ и $\Omega$.

**2.** Пусть $\omega$ — окружность с центром $O$ и радиусом $R$, $X$ — произвольная точка. Докажите, что $\deg(X,\omega)=OX^2-R^2$.

**3.** В угол вписаны две окружности. Первая окружность касается одной из сторон угла в точке $K$, вторая касается другой стороны угла в точке $L$. Докажите, что прямая $KL$ высекает на окружностях равные хорды.

**4.** Постройте окружность, проходящую через две данные точки и касающуюся данной прямой.

**5.** Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями $AD$ и $BC$ пересекаются в точке $P$, причем $\angle APB<90^\circ$. Докажите, что длины отрезков касательных, проведенных из точки $P$ к окружностям, построенным на отрезках $AB$ и $CD$ как на диаметрах, равны.

**6.** На окружности $\omega$ выбраны точки $A,B,C$ так, что $AB=BC$. Касательные к $\omega$ в точках $A$ и $B$ пересекаются в точке $D$; $E$ — точка пересечения $DC$ и $\omega$. Докажите, что прямая $AE$ делит пополам отрезок $BD$.

**7.** В треугольнике $ABC$ отмечены середины $M$ и $N$ отрезков $BC$ и $CM$ соответственно. Описанная окружность треугольника $ABN$ вторично пересекает отрезок $AC$ в точке $S$. Докажите, что $\angle BAM=\angle MSN$.

**8.** В остроугольном треугольнике $ABC$ прямые $a$ и $b$ содержат высоты, проведенные из вершин $A$ и $B$ соответственно. Окружности $\omega_A$ и $\omega_B$ построены на отрезках $BC$ и $AC$ соответственно как на диаметрах. Прямая $a$ пересекает $\omega_A$ в точках $P$ и $Q$, прямая $b$ пересекает $\omega_B$ в точках $R$ и $S$. Докажите, что точки $P,Q,R,S$ лежат на одной окружности.

**9.** Окружность $\omega$ касается сторон угла $BAC$ в точках $B$ и $C$. Прямая $\ell$ пересекает отрезки $AB$ и $AC$ в точках $K$ и $L$ соответственно. Окружность $\omega$ пересекает $\ell$ в точках $P$ и $Q$. Точки $S$ и $T$ выбраны на отрезке $BC$ так, что $KS\parallel AC$ и $LT\parallel AB$. Докажите, что точки $P,Q,S$ и $T$ лежат на одной окружности.