8 класс | **Гомотетия** | 9 марта 2019

Определение. *Гомотетией* с центром в точке O и коэффициентом $k \neq 0$ называется преобразование плоскости H_O^k, которое переводит каждую точку T в точку T' такую, что $\overrightarrow{OT'} = k \cdot \overrightarrow{OT}$.

Свойства гомотетии.

1. При гомотетии все расстояния изменяются в $|k|$ раз.
2. Гомотетия переводит прямую в параллельную ей прямую, а окружность – в окружность.
3. Гомотетия сохраняет углы.
4. Гомотетия имеет единственную неподвижную точку (в случае $k \neq 1$).

Упражнение 1. Докажите, что в трапеции середины оснований, точка пересечения диагоналей и точка пересечения боковых сторон лежат на одной прямой.

Упражнение 2. Найдите геометрическое место середин хорд окружности, одним из концов которых является заданная точка A.

1. На каждом из оснований AD и BC трапеции $ABCD$ построены вне трапеции равносторонние треугольники. Докажите, что отрезок, соединяющий третьи вершины этих треугольников, проходит через точку пересечения диагоналей трапеции.

2. Даны угол и точка M внутри него. Постройте циркулем и линейкой окружность, касающуюся сторон угла и проходящую через точку M.

3. Соответственные стороны треугольников ABC и $A'B'C'$ параллельны. Докажите, что один треугольник в другой можно перевести либо гомотетией, либо параллельным переносом.

4. Докажите, что три прямые, проведённые через середины сторон треугольника параллельно биссектрисам противолежащих углов, пересекаются в одной точке.

5. Внутри полосы, ограниченной параллельными прямыми a и b, нарисованы две окружности ω_a и ω_b, касающиеся друг друга в точке S. Кроме того, ω_a касается a в точке A; ω_b касается b в точке B. Докажите, что точка S лежит на отрезке AB.

6. Окружности ω и ω_A — вписанная и вневписанная окружности треугольника ABC соответственно. Точки касания ω и ω_A с отрезком BC обозначены через K и K_A; точки L и L_A лежат на ω и ω_A и диаметрально противоположны K и K_A соответственно. Докажите, что прямые KL_A и K_AL пересекаются в точке A.

7. На стороне BC треугольника ABC выбрана точка D такая, что радиусы вписанных окружностей треугольников ABD и ACD равны. Докажите, что радиусы вневписанных окружностей этих треугольников, касающихся BC, тоже равны.

8. Вписанная окружность неравностороннего треугольника ABC имеет центр I и касается его сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Середины «меньших» дуг BC, CA, AB описанной окружности треугольника обозначены через A_0, B_0, C_0 соответственно, а её центр — через O.

а) Докажите, что прямые A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1 пересекаются в одной точке.

б) Докажите, что ортоцентр треугольника $A_1B_1C_1$ лежит на прямой OI.

8 класс | **Гомотетия** | 9 марта 2019

Определение. *Гомотетией* с центром в точке O и коэффициентом $k \neq 0$ называется преобразование плоскости H_O^k, которое переводит каждую точку T в точку T' такую, что $\overrightarrow{OT'} = k \cdot \overrightarrow{OT}$.

Свойства гомотетии.

1. При гомотетии все расстояния изменяются в $|k|$ раз.
2. Гомотетия переводит прямую в параллельную ей прямую, а окружность – в окружность.
3. Гомотетия сохраняет углы.
4. Гомотетия имеет единственную неподвижную точку (в случае $k \neq 1$).

Упражнение 1. Докажите, что в трапеции середины оснований, точка пересечения диагоналей и точка пересечения боковых сторон лежат на одной прямой.

Упражнение 2. Найдите геометрическое место середин хорд окружности, одним из концов которых является заданная точка A.

1. На каждом из оснований AD и BC трапеции $ABCD$ построены вне трапеции равносторонние треугольники. Докажите, что отрезок, соединяющий третьи вершины этих треугольников, проходит через точку пересечения диагоналей трапеции.

2. Даны угол и точка M внутри него. Постройте циркулем и линейкой окружность, касающуюся сторон угла и проходящую через точку M.

3. Соответственные стороны треугольников ABC и $A'B'C'$ параллельны. Докажите, что один треугольник в другой можно перевести либо гомотетией, либо параллельным переносом.

4. Докажите, что три прямые, проведённые через середины сторон треугольника параллельно биссектрисам противолежащих углов, пересекаются в одной точке.

5. Внутри полосы, ограниченной параллельными прямыми a и b, нарисованы две окружности ω_a и ω_b, касающиеся друг друга в точке S. Кроме того, ω_a касается a в точке A; ω_b касается b в точке B. Докажите, что точка S лежит на отрезке AB.

6. Окружности ω и ω_A — вписанная и вневписанная окружности треугольника ABC соответственно. Точки касания ω и ω_A с отрезком BC обозначены через K и K_A; точки L и L_A лежат на ω и ω_A и диаметрально противоположны K и K_A соответственно. Докажите, что прямые KL_A и K_AL пересекаются в точке A.

7. На стороне BC треугольника ABC выбрана точка D такая, что радиусы вписанных окружностей треугольников ABD и ACD равны. Докажите, что радиусы вневписанных окружностей этих треугольников, касающихся BC, тоже равны.

8. Вписанная окружность неравностороннего треугольника ABC имеет центр I и касается его сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Середины «меньших» дуг BC, CA, AB описанной окружности треугольника обозначены через A_0, B_0, C_0 соответственно, а её центр — через O.

а) Докажите, что прямые A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1 пересекаются в одной точке.

б) Докажите, что ортоцентр треугольника $A_1B_1C_1$ лежит на прямой OI.