8 класс **Подобие треугольников** 16 февраля 2019

1. Теорема о квадрате касательной. Дана окружность ω и точка A вне неё. Через точку A к этой окружности проведена касательная AX и секущая, пересекающая её в точках B и C. Докажите, что $AX^2 = AB \cdot AC$.

2. Свойство биссектрисы. Пусть AL — биссектриса треугольника ABC. Докажите, что $\dfrac{BL}{LC} = \dfrac{AB}{AC}$.

3. Окружность, проходящая через точку C, пересекает стороны BC и AC треугольника ABC в точках A_1 и B_1 соответственно, а его описанную окружность в точке M. Докажите, что $\triangle AB_1M \sim \triangle BA_1M$.

4. Докажите, что медиана AM треугольника ABC делит пополам любой отрезок с концами на AB и AC, параллельный стороне BC.

5. В трапеции с длинами оснований a и b провели отрезок, параллельный основаниям, и делящийся диагоналями трапеции на три равные части. Чему может быть равна его длина?

6. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC угол при вершине A — прямой, O — точка пересечения диагоналей, E — проекция точки O на сторону AB. Докажите, что $\angle DEO = \angle CEO$.

7. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C опущена высота CH. В треугольники ACH и BCH вписали окружности; I_1 и I_2 — их центры; P_1 и P_2 — их точки касания с AC и BC. Докажите, что прямые I_1P_1 и I_2P_2 пересекаются на AB.

8. На сторонах треугольника ABC как на основаниях построены подобные равнобедренные треугольники AB_1C и AC_1B внешним образом и BA_1C внутренним образом. Докажите, что $AB_1A_1C_1$ — параллелограмм.

9. Две неравные окружности с центрами M и N пересекаются в точках P и Q. Касательная к первой окружности, восстановленная в точке P, пересекает касательную в точке Q ко второй окружности в точке X. Докажите, что углы PXQ и MXN имеют общую биссектрису.

10. В треугольнике ABC проведена биссектриса BD (точка D лежит на отрезке AC). Прямая BD пересекает окружность Ω, описанную около треугольника ABC, в точках B и E. Окружность ω, построенная на отрезке DE как на диаметре, пересекает окружность Ω в точках E и F. Докажите, что прямая, симметричная прямой BF относительно прямой BD, содержит медиану треугольника ABC.

8 класс **Подобие треугольников** 16 февраля 2019

1. Теорема о квадрате касательной. Дана окружность ω и точка A вне неё. Через точку A к этой окружности проведена касательная AX и секущая, пересекающая её в точках B и C. Докажите, что $AX^2 = AB \cdot AC$.

2. Свойство биссектрисы. Пусть AL — биссектриса треугольника ABC. Докажите, что $\dfrac{BL}{LC} = \dfrac{AB}{AC}$.

3. Окружность, проходящая через точку C, пересекает стороны BC и AC треугольника ABC в точках A_1 и B_1 соответственно, а его описанную окружность в точке M. Докажите, что $\triangle AB_1M \sim \triangle BA_1M$.

4. Докажите, что медиана AM треугольника ABC делит пополам любой отрезок с концами на AB и AC, параллельный стороне BC.

5. В трапеции с длинами оснований a и b провели отрезок, параллельный основаниям, и делящийся диагоналями трапеции на три равные части. Чему может быть равна его длина?

6. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC угол при вершине A — прямой, O — точка пересечения диагоналей, E — проекция точки O на сторону AB. Докажите, что $\angle DEO = \angle CEO$.

7. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C опущена высота CH. В треугольники ACH и BCH вписали окружности; I_1 и I_2 — их центры; P_1 и P_2 — их точки касания с AC и BC. Докажите, что прямые I_1P_1 и I_2P_2 пересекаются на AB.

8. На сторонах треугольника ABC как на основаниях построены подобные равнобедренные треугольники AB_1C и AC_1B внешним образом и BA_1C внутренним образом. Докажите, что $AB_1A_1C_1$ — параллелограмм.

9. Две неравные окружности с центрами M и N пересекаются в точках P и Q. Касательная к первой окружности, восстановленная в точке P, пересекает касательную в точке Q ко второй окружности в точке X. Докажите, что углы PXQ и MXN имеют общую биссектрису.

10. В треугольнике ABC проведена биссектриса BD (точка D лежит на отрезке AC). Прямая BD пересекает окружность Ω, описанную около треугольника ABC, в точках B и E. Окружность ω, построенная на отрезке DE как на диаметре, пересекает окружность Ω в точках E и F. Докажите, что прямая, симметричная прямой BF относительно прямой BD, содержит медиану треугольника ABC.