8 класс — Разнобой — 26 января 2019

1. Докажите, что уравнение $(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0$ имеет хотя бы один корень.

2. На доске написаны несколько чисел. Известно, что квадрат любого записанного числа больше произведения любых двух других записанных чисел. Какое наибольшее количество чисел может быть на доске?

3. Выпуклый многоугольник разрезан непересекающимися диагоналями на равнобедренные треугольники. Докажите, что в этом многоугольнике найдутся две равные стороны.

4. Назовём натуральное число *интересным*, если сумма его цифр — простое число. Какое наибольшее количество интересных чисел может быть среди пяти подряд идущих натуральных чисел?

5. Назовём непустое (конечное или бесконечное) множество A, состоящее из натуральных чисел, *полным*, если для любых натуральных a и b (не обязательно различных и не обязательно лежащих в A) таких, что $a+b$ лежит в A, число ab также лежит в A. Найдите все полные множества натуральных чисел.

6. В остроугольном треугольнике ABC проведены медиана AM и высота BH. Перпендикуляр, восстановленный в точке M к прямой AM, пересекает луч HB в точке K. Докажите, что если $\angle MAC = 30°$, то $AK = BC$.

7. а) Все клетки таблицы 100×100 пронумерованы в некотором порядке числами от 1 до 10000. Лёша смотрит на таблицу и закрашивает N клеток по своему выбору. Далее каждым своим ходом он может закрасить любую клетку таблицы, если в одной строке или одном столбце с ней есть закрашенная клетка с меньшим номером. При каком наименьшем N Лёша независимо от исходной нумерации сможет за несколько ходов закрасить все клетки таблицы?

б) Тот же вопрос, но теперь Лёша может закрасить любую клетку таблицы, либо если в одной строке с ней есть закрашенная клетка с меньшим номером, либо если в одном столбце с ней есть закрашенная клетка с большим номером.

8. О выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $\angle DAB = 90°$, а также $\angle ADC = \angle BAM$, где M — середина стороны BC. Докажите, что $\angle ADB = \angle CAM$.

8 класс — Разнобой — 26 января 2019

1. Докажите, что уравнение $(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0$ имеет хотя бы один корень.

2. На доске написаны несколько чисел. Известно, что квадрат любого записанного числа больше произведения любых двух других записанных чисел. Какое наибольшее количество чисел может быть на доске?

3. Выпуклый многоугольник разрезан непересекающимися диагоналями на равнобедренные треугольники. Докажите, что в этом многоугольнике найдутся две равные стороны.

4. Назовём натуральное число *интересным*, если сумма его цифр — простое число. Какое наибольшее количество интересных чисел может быть среди пяти подряд идущих натуральных чисел?

5. Назовём непустое (конечное или бесконечное) множество A, состоящее из натуральных чисел, *полным*, если для любых натуральных a и b (не обязательно различных и не обязательно лежащих в A) таких, что $a+b$ лежит в A, число ab также лежит в A. Найдите все полные множества натуральных чисел.

6. В остроугольном треугольнике ABC проведены медиана AM и высота BH. Перпендикуляр, восстановленный в точке M к прямой AM, пересекает луч HB в точке K. Докажите, что если $\angle MAC = 30°$, то $AK = BC$.

7. а) Все клетки таблицы 100×100 пронумерованы в некотором порядке числами от 1 до 10000. Лёша смотрит на таблицу и закрашивает N клеток по своему выбору. Далее каждым своим ходом он может закрасить любую клетку таблицы, если в одной строке или одном столбце с ней есть закрашенная клетка с меньшим номером. При каком наименьшем N Лёша независимо от исходной нумерации сможет за несколько ходов закрасить все клетки таблицы?

б) Тот же вопрос, но теперь Лёша может закрасить любую клетку таблицы, либо если в одной строке с ней есть закрашенная клетка с меньшим номером, либо если в одном столбце с ней есть закрашенная клетка с большим номером.

8. О выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $\angle DAB = 90°$, а также $\angle ADC = \angle BAM$, где M — середина стороны BC. Докажите, что $\angle ADB = \angle CAM$.