8 класс **Решения** 12 января 2019

1. Среди 63 внешне одинаковых монет есть 7 фальшивых. Все фальшивые монеты весят одинаково, все настоящие монеты также весят одинаково, и фальшивая монета легче настоящей. Как за 3 взвешивания на чашечных весах без гирь определить 7 настоящих монет?

Решение. Отложим одну монету и положим на чашки весов по 31 монете. Если чашки уравновесились, то мы отложили фальшивую и на каждой чашке по 3 фальшивых монеты. Если же одна из чашек оказалась тяжелее, то на ней наверняка не более трёх фальшивых монет. Таким образом, после первого взвешивания мы сможем выделить 31 монету, среди которых не более трёх фальшивых.

Возьмём эту группу монет и проведём аналогичную операцию: снова отложим одну монету и положим на чашки весов по 15 монет. После этого взвешивания мы сможем выделить 15 монет, среди которых не более одной фальшивой.

Повторив аналогичную операцию в третий раз, мы получим 7 настоящих монет.

2. Пусть a, b, c — стороны треугольника. Докажите неравенство

$$\frac{a^2+2bc}{b^2+c^2}+\frac{b^2+2ac}{c^2+a^2}+\frac{c^2+2ab}{a^2+b^2}\geqslant 3.$$

Решение. Условие симметрично относительно a, b, c. По неравенству треугольника имеем $a+c>b$ и $a+b>c$, откуда $a>|b-c|$. Оценим первую дробь: $\dfrac{a^2+2bc}{b^2+c^2}>\dfrac{(b-c)^2+2bc}{b^2+c^2}=1$. Аналогично, и две оставшиеся дроби больше 1. Следовательно, сумма больше 3.

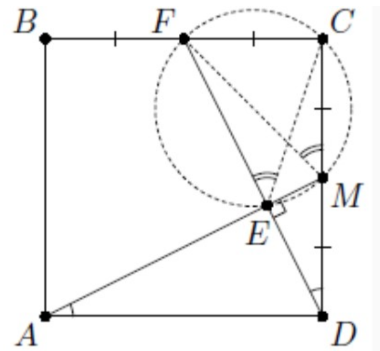
3. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ — натуральные числа, $a_1<a_2<\ldots<a_{10}$. Пусть b_k — наибольший делитель a_k такой, что $b_k<a_k$. Оказалось, что $b_1>b_2>\ldots>b_{10}$. Докажите, что $a_{10}>500$.

Решение. Заметим, что $b_k=\frac{a_k}{c_k}$, где c_k — наименьший простой делитель a_k. Так как $b_9>b_{10}$, то $b_9>1$ и $b_9\geqslant c_9$. Отсюда $a_{10}>a_9\geqslant c_9^2$. Но из неравенств $a_i<a_{i+1}, b_i>b_{i+1}$ следует, что $c_i<c_{i+1}$, т. е. $c_1<c_2<\ldots<c_{10}$. Значит, $c_9\geqslant 23$, так как 23 — девятое по счету простое число. Поэтому $a_{10}>c_9^2\geqslant 529>500$.

4. Точка F — середина стороны BC квадрата $ABCD$. К отрезку DF проведён перпендикуляр AE. Найдите $\angle CEF$.

Решение. Пусть прямая AE пересекает сторону CD квадрата в точке M. Треугольники ADM и DCF равны по катету и острому углу. Следовательно, точка M — середина стороны CD. Тогда треугольник CFM — прямоугольный равнобедренный, поэтому $\angle CMF=45°$.

Т.к. $\angle MEF=\angle MCF=90°$, то четырёхугольник $MCFE$ — вписанный. Вписанные углы $\angle CEF$ и $\angle CMF$ опираются на одну и ту же дугу этой окружности, поэтому $\angle CEF=\angle CMF=45°$.



5. Клетки доски размером 5×5 раскрашены в шахматном порядке (угловые клетки — чёрные). По чёрным клеткам этой доски двигается фигура — *мини-слон*, оставляя след на каждой клетке, где он побывал, и больше в эту клетку не возвращаясь. Мини-слон может ходить либо в свободные от следов соседние (по диагонали) клетки, либо прыгать (также по диагонали) через одну клетку, в которой оставлен след, на свободную клетку за ней. Какое наибольшее количество клеток сможет посетить мини-слон?

Решение. Докажем, что все чёрные клетки мини-слон обойти не сможет. Рассмотрим четыре угловые клетки. Выйти из такой клетки мини-слон может либо в соседнюю клетку, либо в центральную. В соседнюю клетку из угловой он может пойти только первым ходом. Действительно, попасть в угловую клетку можно либо из соседней, либо из центральной, перепрыгнув через уже пройденную соседнюю.

В обоих случаях, снова пойти в соседнюю клетку мини-слон не сможет. В центральную клетку из угловой мини-слон может пойти также не более одного раза. Таким образом, мини-слон покинет угловые клетки не более двух раз, значит, он посетит не более трёх угловых клеток.

Пример на 12 клеток приведён ниже (числа от 1 до 12 показывают порядок обхода клеток).

1		4		6
	2		5	
3		7		9
	11		8	
12		10		

6. $P(x)$ — квадратный трёхчлен. Какое наибольшее количество членов, равных сумме двух предыдущих, может быть в последовательности $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $\ldots$?

Решение. Пусть $P(x) = ax^2 + bx + c$, причём $a \neq 0$. Равенство $P(x-1) + P(x) = P(x+1)$ для натурального $x > 1$ равносильно равенствам

$$a(x-1)^2 + b(x-1) + c + ax^2 + bx + c = a(x+1)^2 + b(x+1) + c,$$

$$ax^2 + bx + c = 4ax + 2b \quad \Leftrightarrow \quad ax^2 + (b-4a)x + (c-2b) = 0.$$

Это квадратное уравнение относительно x с ненулевым старшим коэффициентом, поэтому у него не более двух корней. Поэтому и членов, равных сумме двух предыдущих, не более двух.

Приведём теперь пример на 2. Пусть $P(x) = x^2 - x + 4$, тогда $P(1) = 4$, $P(2) = 6$, $P(3) = 10$, $P(4) = 16$. Третий и четвёртый члены являются искомыми.