

Определение. Целая часть $[x]$ — это наибольшее целое число, не превосходящее данное число x . Дробная часть числа x определяется как $\{x\} = x - [x]$.

Свойства:

1. $[x + n] = [x] + n$, где n — целое.
2. $\{x + n\} = \{x\}$, где n — целое.
3. $[x + y] \geq [x] + [y]$;
4. $\{x + y\} \leq \{x\} + \{y\}$;
5. $\{x + y\} = \{\{x\} + \{y\}\}$.

1. Найдите значение выражения

$$[\sqrt{5}] + \left[\frac{[2\sqrt{5}]}{2} \right] + \left[\frac{[3\sqrt{5}]}{3} \right] + \dots + \left[\frac{[2018\sqrt{5}]}{2018} \right].$$

2. Докажите, что существует бесконечно много нецелых положительных чисел x таких, что число $x(x - 3\{x\})$ — целое.

3. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x + [y] = \{z\} + 54, \\ y + [z] = \{x\} + 54, \\ z + [x] = \{y\} + 54. \end{cases}$$

4. Решите уравнение $\sqrt{1 + \{2x\}} = [x^2] + 2[x] + 3$.

5. Числа x, y, z, t таковы, что $\{x + y + z\} = \{y + z + t\} = \{z + t + x\} = \{t + x + y\} = \frac{1}{4}$. Найдите $\{x + y + z + t\}$.

6. Решите уравнение

$$[x] + \frac{2018}{[x]} = \{x\} + \frac{2018}{\{x\}}.$$

7. Решите уравнение $[x]^5 + \{x\}^5 = x^5$.

8. Существует ли рациональное число $x > 0$, для которого $\{x^2\} + \{x\} = 1$?

9. Докажите, что если $\{a\} + \{\frac{1}{a}\} = 1$, то $\{a^n\} + \{\frac{1}{a^n}\} = 1$.

10. Для $x > 1$ докажите неравенство

$$\frac{x + \{x\}}{[x]} - \frac{[x]}{x + \{x\}} + \frac{x + [x]}{\{x\}} - \frac{\{x\}}{x + [x]} > 5.$$

11. Решите уравнение $[x] + [2x] + [4x] + [8x] + [16x] + [32x] = 12345$.

Определение. Целая часть $[x]$ — это наибольшее целое число, не превосходящее данное число x . Дробная часть числа x определяется как $\{x\} = x - [x]$.

Свойства:

1. $[x + n] = [x] + n$, где n — целое.
2. $\{x + n\} = \{x\}$, где n — целое.
3. $[x + y] \geq [x] + [y]$;
4. $\{x + y\} \leq \{x\} + \{y\}$;
5. $\{x + y\} = \{\{x\} + \{y\}\}$.

1. Найдите значение выражения

$$[\sqrt{5}] + \left[\frac{[2\sqrt{5}]}{2} \right] + \left[\frac{[3\sqrt{5}]}{3} \right] + \dots + \left[\frac{[2018\sqrt{5}]}{2018} \right].$$

2. Докажите, что существует бесконечно много нецелых положительных чисел x таких, что число $x(x - 3\{x\})$ — целое.

3. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x + [y] = \{z\} + 54, \\ y + [z] = \{x\} + 54, \\ z + [x] = \{y\} + 54. \end{cases}$$

4. Решите уравнение $\sqrt{1 + \{2x\}} = [x^2] + 2[x] + 3$.

5. Числа x, y, z, t таковы, что $\{x + y + z\} = \{y + z + t\} = \{z + t + x\} = \{t + x + y\} = \frac{1}{4}$. Найдите $\{x + y + z + t\}$.

6. Решите уравнение

$$[x] + \frac{2018}{[x]} = \{x\} + \frac{2018}{\{x\}}.$$

7. Решите уравнение $[x]^5 + \{x\}^5 = x^5$.

8. Существует ли рациональное число $x > 0$, для которого $\{x^2\} + \{x\} = 1$?

9. Докажите, что если $\{a\} + \{\frac{1}{a}\} = 1$, то $\{a^n\} + \{\frac{1}{a^n}\} = 1$.

10. Для $x > 1$ докажите неравенство

$$\frac{x + \{x\}}{[x]} - \frac{[x]}{x + \{x\}} + \frac{x + [x]}{\{x\}} - \frac{\{x\}}{x + [x]} > 5.$$

11. Решите уравнение $[x] + [2x] + [4x] + [8x] + [16x] + [32x] = 12345$.