8 класс — **Решения** — 15 мая 2019

1. Может ли произведение первых нескольких натуральных чисел быть равно произведению первых нескольких чётных натуральных чисел? (В каждом произведении должно быть хотя бы 2 множителя.)

Ответ. Нет.

Решение. Пусть произведение первых n натуральных чисел оказалось равно произведению первых m чётных натуральных чисел. Тогда $n! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2m = 2^m \cdot m!$. Разделив на $m!$, получим $2^m = (m+1)(m+2)\ldots(n-1)n$. Т.к. $m > 1$, то все множители в правой части больше 1. Но среди первых двух множителей один нечётный, что невозможно. Следовательно, в правой части всего один множитель, т.е. $2^m = m+1$. Но и это невозможно, т.к.

$$2^m = (2^{m-1} + 2^{m-2} + \ldots + 2 + 1) + 1 > (1 + 1 + \ldots + 1 + 1) + 1 = m + 1.$$

2. Сумма трёх положительных чисел не превосходит суммы их попарных произведений. Докажите, что обе эти суммы не меньше 3.

Решение. Пусть a, b, c — наши положительные числа. Оценим квадрат их суммы:

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca) =$$

$$= \frac{a^2+b^2}{2} + \frac{b^2+c^2}{2} + \frac{c^2+a^2}{2} + 2(ab+bc+ca) \geqslant$$

$$\geqslant ab + bc + ca + 2(ab+bc+ca) = 3(ab+bc+ca) \geqslant 3(a+b+c).$$

Т.к. $a+b+c > 0$, получаем $a+b+c \geqslant 3$. Отсюда и сумма попарных произведений не меньше 3.

3. В классе 16 учеников. Каждый месяц учитель делит класс на две группы. Какое наименьшее количество месяцев необходимо учителю, чтобы любые два ученика в какой-то из месяцев оказались в разных группах?

Ответ. 4 месяца.

Решение. На рисунке показано, как разбивать класс на две группы так, чтобы любые два ученика в какой-то из четырех месяцев оказались в разных группах. Каждому ученику соответствует столбец таблицы, а каждому месяцу — её строка. Нуль, стоящий в клетке таблицы, означает, что данный ученик входит в первую группу, а единица означает, что данный ученик входит во вторую группу. (Таблица устроена так, что в её i-м столбце находится двоичная запись числа $i-1$.)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
3	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
4	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Теперь докажем, что за 3 месяца выполнить требуемое условие нельзя (если их было меньше 3, можно добавить несколько «фиктивных» месяцев). Составим таблицу, аналогичную приведённой выше. В ней будет 16 столбцов и 3 строки. Так как в столбце из трёх клеток можно расставить нули и единицы восемью различными способами, то в таблице найдутся два одинаковых столбца. Ученики, которым соответствуют эти столбцы, в течение трёх месяцев будут попадать в одну и ту же группу.

4. На боковых сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC взяты точки K и L соответственно, так что $AK + LC = KL$. Из середины M отрезка KL провели прямую, параллельную BC, и эта прямая пересекла сторону AC в точке N. Найдите $\angle KNL$.

Ответ. $90°$.

Решение. Проведём через точку K прямую, параллельную BC, до пересечения с основанием AC в точке P. Очевидно, $KP = AK$. Отрезок MN — средняя линия трапеции (или параллелограмма) $KLCP$, поэтому $MN = \frac{LC+KP}{2} = \frac{KL}{2}$. Таким образом, угол KNL опирается на диаметр окружности с центром M, поэтому он прямой.

5. Выпуклый 2019-угольник разбит диагоналями на треугольники (при этом диагонали не пересекаются внутри многоугольника). Треугольники раскрашены в чёрный и белый цвета так, что каждые два треугольника с общей стороной раскрашены в разные цвета. Найдите наибольшее возможное значение разности количества белых и количества чёрных треугольников.

Ответ. 673.

Решение. При разбиении на треугольники диагоналями получится 2017 треугольников (т.к. сумма всех углов треугольников разбиения равна сумме всех углов 2019-угольника, т.е. $180^\circ \cdot 2017$). Т.к. каждая новая проводимая диагональ увеличивает количество частей на 1, то диагоналей всего 2016. К каждой из них примыкает чёрный треугольник, поэтому чёрных треугольников не меньше $\frac{2016}{3} = 672$. Следовательно, белых треугольников не больше $2017 - 672 = 1345$, а искомая разность не больше $1345 - 672 = 673$.

Приведём теперь пример на 673. Рассмотрим изначально белый треугольник, в нём рассматриваемая разность равна 1. Будем последовательно увеличивать число сторон многоугольника на 3, увеличивая значение разности на 1. Для этого надо каждый раз заменять один из белых треугольников, примыкающих к границе, на шестиугольник, разрезанный, как на рисунке ниже.