8 класс	Делители	20 апреля 2019

Определение. Для натурального числа n обозначим через $\tau(n)$ количество натуральных делителей n, а через $\sigma(n)$ — сумму всех натуральных делителей n.

1. Докажите, что $\tau(n) \leqslant 2\sqrt{n}$.

2. Натуральное число n таково, что $n+1$ делится на 24. Докажите, что сумма всех натуральных делителей n делится на 24.

3. Пусть $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ — каноническое разложение числа n на простые множители.

а) Найдите формулы для $\tau(n)$ и $\sigma(n)$.

б) Для взаимно простых m и n докажите, что $\tau(m)\tau(n) = \tau(mn)$ и $\sigma(m)\sigma(n) = \sigma(mn)$. Данное свойство называется *мультипликативностью*.

в) Для любых натуральных m и n, больших 1, докажите, что $\tau(m)\tau(n) \geqslant \tau(mn)$ и $\sigma(m)\sigma(n) \geqslant \sigma(mn)$.

4. У натурального числа n есть ровно 6 натуральных делителей, и их сумма равна 78. Найдите n.

5. Петя нашёл сумму всех нечётных натуральных делителей некоторого чётного числа (включая 1), а Вася — сумму всех чётных натуральных делителей этого же числа (включая само число). Может ли произведение двух найденных чисел быть точным квадратом?

Определение. Натуральное число называется *совершенным*, если оно равно сумме всех своих делителей, кроме самого этого числа.

6. Докажите, что совершенное число не может быть точным квадратом.

7. а) Пусть число $2^k - 1$ — простое. Докажите, что k — простое.

б) Докажите, что n является чётным совершенным числом тогда и только тогда, когда оно имеет вид $2^{p-1}(2^p - 1)$, где p и $2^p - 1$ — простые числа.

8. Докажите, что каждое натуральное число является разностью двух натуральных чисел, имеющих поровну простых делителей.

9. Существует ли натуральное n, для которого $\sigma(n) > 2019n$?

8 класс	Делители	20 апреля 2019

Определение. Для натурального числа n обозначим через $\tau(n)$ количество натуральных делителей n, а через $\sigma(n)$ — сумму всех натуральных делителей n.

1. Докажите, что $\tau(n) \leqslant 2\sqrt{n}$.

2. Натуральное число n таково, что $n+1$ делится на 24. Докажите, что сумма всех натуральных делителей n делится на 24.

3. Пусть $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ — каноническое разложение числа n на простые множители.

а) Найдите формулы для $\tau(n)$ и $\sigma(n)$.

б) Для взаимно простых m и n докажите, что $\tau(m)\tau(n) = \tau(mn)$ и $\sigma(m)\sigma(n) = \sigma(mn)$. Данное свойство называется *мультипликативностью*.

в) Для любых натуральных m и n, больших 1, докажите, что $\tau(m)\tau(n) \geqslant \tau(mn)$ и $\sigma(m)\sigma(n) \geqslant \sigma(mn)$.

4. У натурального числа n есть ровно 6 натуральных делителей, и их сумма равна 78. Найдите n.

5. Петя нашёл сумму всех нечётных натуральных делителей некоторого чётного числа (включая 1), а Вася — сумму всех чётных натуральных делителей этого же числа (включая само число). Может ли произведение двух найденных чисел быть точным квадратом?

Определение. Натуральное число называется *совершенным*, если оно равно сумме всех своих делителей, кроме самого этого числа.

6. Докажите, что совершенное число не может быть точным квадратом.

7. а) Пусть число $2^k - 1$ — простое. Докажите, что k — простое.

б) Докажите, что n является чётным совершенным числом тогда и только тогда, когда оно имеет вид $2^{p-1}(2^p - 1)$, где p и $2^p - 1$ — простые числа.

8. Докажите, что каждое натуральное число является разностью двух натуральных чисел, имеющих поровну простых делителей.

9. Существует ли натуральное n, для которого $\sigma(n) > 2019n$?