8 класс — **Степень точки** — 23 марта 2019

Определение. Пусть ω — окружность, X — точка. Прямая ℓ, проходящая через X, пересекает ω в точках A и B. *Степенью точки* X относительно окружности ω называется следующая величина (не зависящая от прямой ℓ):

$$\deg(X,\omega)=\begin{cases}+XA\cdot XB, & \text{если точка } X \text{ лежит вне } \omega;\\ -XA\cdot XB, & \text{если точка } X \text{ лежит внутри } \omega.\end{cases}$$

1. Пусть ω — окружность с центром O и радиусом R, X — произвольная точка. Докажите, что $\deg(X,\omega)=OX^2-R^2$.

2. Диагонали трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) пересекаются в точке P, причем угол APB — острый. Докажите, что длины отрезков касательных, проведенных из точки P к окружностям, построенным на отрезках AB и CD как на диаметрах, равны.

3. В остроугольном треугольнике ABC прямые a и b содержат высоты, проведенные из вершин A и B соответственно. Окружности ω_A и ω_B построены на отрезках BC и AC соответственно как на диаметрах. Прямая a пересекает ω_A в точках P и Q, прямая b пересекает ω_B в точках R и S. Докажите, что точки P,Q,R,S лежат на одной окружности.

4. В треугольнике ABC отмечены середины M и N отрезков BC и CM соответственно. Описанная окружность треугольника ABN вторично пересекает отрезок AC в точке S. Докажите, что $\angle BAM=\angle MSN$.

5. В окружность вписана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Другая окружность проходит через точки B,C и пересекает отрезки CA,CD в точках A_1,D_1 соответственно. Точки A_2 и D_2 симметричны точкам A_1 и D_1 относительно середин отрезков CA и CD соответственно. Докажите, что точки A,D,A_2 и D_2 лежат на одной окружности.

6. Окружность ω касается сторон угла BAC в точках B и C. Прямая ℓ пересекает отрезки AB и AC в точках K и L соответственно. Окружность ω пересекает ℓ в точках P и Q. Точки S и T выбраны на отрезке BC так, что $KS \parallel AC$ и $LT \parallel AB$. Докажите, что точки P,Q,S и T лежат на одной окружности.

7. Пусть в треугольнике ABC точки O и I — центры описанной и вписанной окружностей радиусов R и r соответственно.

а) **Формула Эйлера.** Докажите, что $OI^2=R^2-2Rr$.

б) Докажите, что $R\geqslant 2r$. Для каких треугольников $R=2r$?

8. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC высоты AA_1,BB_1 и CC_1 пересекаются в точке H, а O — центр его описанной окружности. Докажите, что точка, симметричная точке A относительно прямой B_1C_1, лежит на описанной окружности треугольника OHA_1.

9. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках M и N. Пусть ℓ — их общая внешняя касательная, причем M ближе к ℓ, чем N, а A и B — точки ее касания с ω_1,ω_2 соответственно. Прямая, параллельная ℓ и проходящая через M, повторно пересекает ω_1,ω_2 в точках C,D соответственно. Прямые CA и DB пересекаются в точке E; AN и CD — в точке P; BN и CD — в точке Q. Докажите, что $EP=EQ$.

8 класс — **Степень точки** — 23 марта 2019

Определение. Пусть ω — окружность, X — точка. Прямая ℓ, проходящая через X, пересекает ω в точках A и B. *Степенью точки* X относительно окружности ω называется следующая величина (не зависящая от прямой ℓ):

$$\deg(X,\omega)=\begin{cases}+XA\cdot XB, & \text{если точка } X \text{ лежит вне } \omega;\\ -XA\cdot XB, & \text{если точка } X \text{ лежит внутри } \omega.\end{cases}$$

1. Пусть ω — окружность с центром O и радиусом R, X — произвольная точка. Докажите, что $\deg(X,\omega)=OX^2-R^2$.

2. Диагонали трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) пересекаются в точке P, причем угол APB — острый. Докажите, что длины отрезков касательных, проведенных из точки P к окружностям, построенным на отрезках AB и CD как на диаметрах, равны.

3. В остроугольном треугольнике ABC прямые a и b содержат высоты, проведенные из вершин A и B соответственно. Окружности ω_A и ω_B построены на отрезках BC и AC соответственно как на диаметрах. Прямая a пересекает ω_A в точках P и Q, прямая b пересекает ω_B в точках R и S. Докажите, что точки P,Q,R,S лежат на одной окружности.

4. В треугольнике ABC отмечены середины M и N отрезков BC и CM соответственно. Описанная окружность треугольника ABN вторично пересекает отрезок AC в точке S. Докажите, что $\angle BAM=\angle MSN$.

5. В окружность вписана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Другая окружность проходит через точки B,C и пересекает отрезки CA,CD в точках A_1,D_1 соответственно. Точки A_2 и D_2 симметричны точкам A_1 и D_1 относительно середин отрезков CA и CD соответственно. Докажите, что точки A,D,A_2 и D_2 лежат на одной окружности.

6. Окружность ω касается сторон угла BAC в точках B и C. Прямая ℓ пересекает отрезки AB и AC в точках K и L соответственно. Окружность ω пересекает ℓ в точках P и Q. Точки S и T выбраны на отрезке BC так, что $KS \parallel AC$ и $LT \parallel AB$. Докажите, что точки P,Q,S и T лежат на одной окружности.

7. Пусть в треугольнике ABC точки O и I — центры описанной и вписанной окружностей радиусов R и r соответственно.

а) **Формула Эйлера.** Докажите, что $OI^2=R^2-2Rr$.

б) Докажите, что $R\geqslant 2r$. Для каких треугольников $R=2r$?

8. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC высоты AA_1,BB_1 и CC_1 пересекаются в точке H, а O — центр его описанной окружности. Докажите, что точка, симметричная точке A относительно прямой B_1C_1, лежит на описанной окружности треугольника OHA_1.

9. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках M и N. Пусть ℓ — их общая внешняя касательная, причем M ближе к ℓ, чем N, а A и B — точки ее касания с ω_1,ω_2 соответственно. Прямая, параллельная ℓ и проходящая через M, повторно пересекает ω_1,ω_2 в точках C,D соответственно. Прямые CA и DB пересекаются в точке E; AN и CD — в точке P; BN и CD — в точке Q. Докажите, что $EP=EQ$.