8 класс | Гомотетия | 9 марта 2019

Определение. *Гомотетией* с центром в точке O и коэффициентом $k \neq 0$ называется преобразование плоскости H_O^k, которое переводит каждую точку T в точку T' такую, что $\overrightarrow{OT'} = k \cdot \overrightarrow{OT}$.

1. Соответственные стороны треугольников ABC и $A'B'C'$ параллельны. Докажите, что один треугольник в другой можно перевести либо гомотетией, либо параллельным переносом.

2. Даны угол и точка внутри него. Постройте циркулем и линейкой окружность, вписанную в этот угол и содержащую эту точку.

3. На каждом из оснований AD и BC трапеции $ABCD$ построены вне трапеции равносторонние треугольники. Докажите, что отрезок, соединяющий третьи вершины этих треугольников, проходит через точку пересечения диагоналей трапеции.

4. Докажите, что три прямые, проведённые через середины сторон треугольника параллельно биссектрисам противолежащих углов, пересекаются в одной точке.

5. Внутри полосы, ограниченной параллельными прямыми a и b, нарисованы две окружности ω_a и ω_b, касающиеся друг друга в точке S. Кроме того, ω_a касается a в точке A; ω_b касается b в точке B. Докажите, что точка S лежит на отрезке AB.

6. Окружности ω и ω_A — вписанная и вневписанная окружности треугольника ABC соответственно. Точки касания ω и ω_A с отрезком BC обозначены через K и K_A; точки L и L_A лежат на ω и ω_A и диаметрально противоположны K и K_A соответственно. Докажите, что прямые KL_A и K_AL пересекаются в точке A.

7. На стороне BC треугольника ABC выбрана точка D такая, что радиусы вписанных окружностей треугольников ABD и ACD равны. Докажите, что радиусы вневписанных окружностей этих треугольников, касающихся BC, тоже равны.

8. Вписанная окружность неравностороннего треугольника ABC имеет центр I и касается его сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Пусть точки A_0, B_0, C_0 — середины «меньших» дуг BC, CA, AB описанной окружности треугольника соответственно, а O — её центр.

а) Докажите, что прямые A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1 пересекаются в одной точке.

б) Докажите, что ортоцентр треугольника $A_1B_1C_1$ лежит на прямой OI.

9. В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность с центром I. Лучи AB, DC пересекаются в точке X. Вписанная окружность треугольника XBC касается отрезка BC в точке P; вневписанная окружность треугольника XAD касается отрезка AD в точке Q. Оказалось, что прямая PQ проходит через X. Докажите, что точка I лежит на прямой, соединяющей середины отрезков BC и AD.

10. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1, а H — его ортоцентр. Точку H отразили относительно прямых B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1; получили точки H_A, H_B, H_C соответственно. Докажите, что прямые AH_A, BH_B, CH_C пересекаются в одной точке.

8 класс | Гомотетия | 9 марта 2019

Определение. *Гомотетией* с центром в точке O и коэффициентом $k \neq 0$ называется преобразование плоскости H_O^k, которое переводит каждую точку T в точку T' такую, что $\overrightarrow{OT'} = k \cdot \overrightarrow{OT}$.

1. Соответственные стороны треугольников ABC и $A'B'C'$ параллельны. Докажите, что один треугольник в другой можно перевести либо гомотетией, либо параллельным переносом.

2. Даны угол и точка внутри него. Постройте циркулем и линейкой окружность, вписанную в этот угол и содержащую эту точку.

3. На каждом из оснований AD и BC трапеции $ABCD$ построены вне трапеции равносторонние треугольники. Докажите, что отрезок, соединяющий третьи вершины этих треугольников, проходит через точку пересечения диагоналей трапеции.

4. Докажите, что три прямые, проведённые через середины сторон треугольника параллельно биссектрисам противолежащих углов, пересекаются в одной точке.

5. Внутри полосы, ограниченной параллельными прямыми a и b, нарисованы две окружности ω_a и ω_b, касающиеся друг друга в точке S. Кроме того, ω_a касается a в точке A; ω_b касается b в точке B. Докажите, что точка S лежит на отрезке AB.

6. Окружности ω и ω_A — вписанная и вневписанная окружности треугольника ABC соответственно. Точки касания ω и ω_A с отрезком BC обозначены через K и K_A; точки L и L_A лежат на ω и ω_A и диаметрально противоположны K и K_A соответственно. Докажите, что прямые KL_A и K_AL пересекаются в точке A.

7. На стороне BC треугольника ABC выбрана точка D такая, что радиусы вписанных окружностей треугольников ABD и ACD равны. Докажите, что радиусы вневписанных окружностей этих треугольников, касающихся BC, тоже равны.

8. Вписанная окружность неравностороннего треугольника ABC имеет центр I и касается его сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Пусть точки A_0, B_0, C_0 — середины «меньших» дуг BC, CA, AB описанной окружности треугольника соответственно, а O — её центр.

а) Докажите, что прямые A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1 пересекаются в одной точке.

б) Докажите, что ортоцентр треугольника $A_1B_1C_1$ лежит на прямой OI.

9. В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность с центром I. Лучи AB, DC пересекаются в точке X. Вписанная окружность треугольника XBC касается отрезка BC в точке P; вневписанная окружность треугольника XAD касается отрезка AD в точке Q. Оказалось, что прямая PQ проходит через X. Докажите, что точка I лежит на прямой, соединяющей середины отрезков BC и AD.

10. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1, а H — его ортоцентр. Точку H отразили относительно прямых B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1; получили точки H_A, H_B, H_C соответственно. Докажите, что прямые AH_A, BH_B, CH_C пересекаются в одной точке.