8 класс	Лемма Холла	2 марта 2019

Лемма Холла. Есть n юношей и несколько девушек. Некоторые юноши знают некоторых девушек. Известно, что для любых k юношей (для всех $1 \leqslant k \leqslant n$) общее число знакомых им девушек не менее k. Тогда всех юношей можно поженить, каждого на знакомой ему девушке.

1. В условиях леммы Холла назовем множество из k юношей *критическим,* если совокупное количество знакомых им девушек в точности равно k.

а) Докажите, что объединение и пересечение двух критических множеств — критические множества.

б) Докажите, что если удалить критическое множество юношей вместе с их знакомыми девушками, то для оставшихся людей будут выполнены условия леммы Холла.

в) Докажите, что если нет ни одного критического множества, то можно поженить любого юношу на знакомой ему девушке, и для оставшихся людей будут выполнены условия леммы Холла. Выведите отсюда лемму Холла.

2. Из шахматной доски вырезали 7 клеток. Докажите, что на оставшиеся клетки можно поставить 8 не бьющих друг друга ладей.

3. Лемма Холла с дефицитом. Дано натуральное d. Докажите, что если любые k юношей (для всех $1 \leqslant k \leqslant n$) знакомы в совокупности не менее чем с $k-d$ девушками, то $n-d$ юношей могут выбрать себе невест из числа знакомых.

4. В компании из n юношей и n девушек каждые k юношей (для всех $1 \leqslant k \leqslant n$) знакомы не менее, чем с k девушками. Докажите, что каждые k девушек (для всех $1 \leqslant k \leqslant n$) знакомы не менее, чем с k юношами.

5. Множество $\mathbb{P}$ состоит из 2019 различных простых чисел. Пусть $\mathbb{A}$ — множество всех возможных произведений 1009 элементов $\mathbb{P}$. Пусть $\mathbb{B}$ — множество всех возможных произведений 1010 элементов $\mathbb{P}$. Докажите, что существует биекция $f\colon \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ такая, что $f(a) \,\vdots\, a$ для каждого $a \in \mathbb{A}$.

6. У Деда Мороза есть не менее n подарков для n школьников. У i-го школьника ровно $x_i > 0$ желаемых подарков. Оказалось, что

$$\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n} \leqslant 1.$$

Докажите, что Дед Мороз может дать каждому школьнику желаемый подарок.

7. Таблица $n \times n$ заполняется числами 0 и 1 так, что любые n клеток, никакие две из которых не содержатся в одной строке или в одном столбце, содержат хотя бы одну единицу. Докажите, что существуют i строк и j столбцов, где $i+j > n$, пересечения которых состоят только из единиц.

Определения. *Вершинным покрытием* некоторого набора ребер графа называется множество вершин таких, что любое ребро из набора имеет вершину из покрытия. *Минимальным вершинным покрытием* называется вершинное покрытие с минимальным количеством вершин. *Паросочетанием* в графе называется множество ребер, любые два из которых не имеют общей вершины. *Максимальным паросочетанием* в графе называется паросочетание с максимальным числом ребер.

8. Теорема Кёнига. В двудольном графе число ребер в максимальном паросочетании равно числу вершин в минимальном вершинном покрытии всех ребер.

9. В таблице m строк и n столбцов. *Горизонтальным ходом* называется такая перестановка элементов таблицы, при которой каждый элемент остаётся в той строке, в которой он был и до перестановки; аналогично определяется *вертикальный ход* ("строка" в предыдущем определении заменяется на "столбец"). За какое наименьшее количество ходов можно гарантированно получить любую перестановку элементов таблицы?