8 класс — Подобие треугольников — 16 февраля 2019

1. Теорема о квадрате касательной. Дана окружность ω и точка A вне неё. Через точку A к этой окружности проведена касательная AX и секущая, пересекающая её в точках B и C. Докажите, что $AX^2 = AB \cdot AC$.

2. Свойства биссектрисы. Пусть AL — биссектриса треугольника ABC. Докажите, что **а)** $\dfrac{BL}{LC} = \dfrac{AB}{AC}$; **б)** $AL^2 = AB \cdot AC - BL \cdot LC$.

3. В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) угол при вершине A — прямой, O — точка пересечения диагоналей, E — проекция точки O на сторону AB. Докажите, что $\angle DEO = \angle CEO$.

4. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C опущена высота CH. В треугольники ACH и BCH вписали окружности; I_1 и I_2 — их центры; P_1 и P_2 — их точки касания с AC и BC. Докажите, что прямые I_1P_1 и I_2P_2 пересекаются на AB.

5. На сторонах треугольника ABC как на основаниях построены подобные равнобедренные треугольники AB_1C и AC_1B внешним образом и BA_1C внутренним образом. Докажите, что $AB_1A_1C_1$ — параллелограмм.

6. Две неравные окружности с центрами M и N пересекаются в точках P и Q. Касательная к первой окружности, восстановленная в точке P, пересекает касательную в точке Q ко второй окружности в точке X. Докажите, что углы PXQ и MXN имеют общую биссектрису.

7. В треугольнике ABC проведена биссектриса BD (точка D лежит на отрезке AC). Прямая BD пересекает окружность Ω, описанную около треугольника ABC, в точках B и E. Окружность ω, построенная на отрезке DE как на диаметре, пересекает окружность Ω в точках E и F. Докажите, что прямая, симметричная прямой BF относительно прямой BD, содержит медиану треугольника ABC.

8. Через центр O окружности, описанной около неравнобедренного остроугольного треугольника ABC, проведены прямые, перпендикулярные сторонам AB и AC. Эти прямые пересекают высоту AD треугольника ABC в точках P и Q. Точка M — середина стороны BC, а S — центр окружности, описанной около треугольника OPQ. Докажите, что $\angle BAS = \angle CAM$.

9. Вписанная окружность ω треугольника ABC касается его сторон BC и AC в точках A_1 и B_1 соответственно. Пусть W — середина меньшей дуги A_1B_1 окружности ω, а M и N — точки пересечения WA и WB с отрезком A_1B_1. Докажите, что $2MN = A_1B_1$.

8 класс — Подобие треугольников — 16 февраля 2019

1. Теорема о квадрате касательной. Дана окружность ω и точка A вне неё. Через точку A к этой окружности проведена касательная AX и секущая, пересекающая её в точках B и C. Докажите, что $AX^2 = AB \cdot AC$.

2. Свойства биссектрисы. Пусть AL — биссектриса треугольника ABC. Докажите, что **а)** $\dfrac{BL}{LC} = \dfrac{AB}{AC}$; **б)** $AL^2 = AB \cdot AC - BL \cdot LC$.

3. В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) угол при вершине A — прямой, O — точка пересечения диагоналей, E — проекция точки O на сторону AB. Докажите, что $\angle DEO = \angle CEO$.

4. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C опущена высота CH. В треугольники ACH и BCH вписали окружности; I_1 и I_2 — их центры; P_1 и P_2 — их точки касания с AC и BC. Докажите, что прямые I_1P_1 и I_2P_2 пересекаются на AB.

5. На сторонах треугольника ABC как на основаниях построены подобные равнобедренные треугольники AB_1C и AC_1B внешним образом и BA_1C внутренним образом. Докажите, что $AB_1A_1C_1$ — параллелограмм.

6. Две неравные окружности с центрами M и N пересекаются в точках P и Q. Касательная к первой окружности, восстановленная в точке P, пересекает касательную в точке Q ко второй окружности в точке X. Докажите, что углы PXQ и MXN имеют общую биссектрису.

7. В треугольнике ABC проведена биссектриса BD (точка D лежит на отрезке AC). Прямая BD пересекает окружность Ω, описанную около треугольника ABC, в точках B и E. Окружность ω, построенная на отрезке DE как на диаметре, пересекает окружность Ω в точках E и F. Докажите, что прямая, симметричная прямой BF относительно прямой BD, содержит медиану треугольника ABC.

8. Через центр O окружности, описанной около неравнобедренного остроугольного треугольника ABC, проведены прямые, перпендикулярные сторонам AB и AC. Эти прямые пересекают высоту AD треугольника ABC в точках P и Q. Точка M — середина стороны BC, а S — центр окружности, описанной около треугольника OPQ. Докажите, что $\angle BAS = \angle CAM$.

9. Вписанная окружность ω треугольника ABC касается его сторон BC и AC в точках A_1 и B_1 соответственно. Пусть W — середина меньшей дуги A_1B_1 окружности ω, а M и N — точки пересечения WA и WB с отрезком A_1B_1. Докажите, что $2MN = A_1B_1$.