

Определение. Граф называется *двудольным*, если его вершины можно раскрасить в два цвета так, чтобы любое ребро соединяло вершины разных цветов.

Упражнение. Является ли дерево двудольным графом?

1. В компании из 100 человек у каждого ровно 3 друга. При каком наименьшем k можно утверждать, что среди любых k людей в этой компании обязательно найдётся пара друзей?

2. Докажите, что граф является двудольным тогда и только тогда, когда все циклы в нём имеют чётную длину.

3. На окружности отмечено 10 точек. Какое наибольшее число отрезков с концами в этих точках можно провести так, чтобы никакие три из этих отрезков не образовывали треугольник с вершинами в этих точках?

4. При каких m и n граф $K_{m,n}$ (т.е. полный двудольный граф, в одной доле которого m , а в другой — n вершин) является планарным?

5. В классе 20 человек. Каждый день либо ровно один ученик заболевает, либо ровно один выздоравливает (дети школу не прогуливают), а если в классе остаётся менее 4 здоровых детей, то уроки отменяются. Могло ли так оказаться, что уроки не отменялись, а в классе присутствовали по разу все возможные наборы из не менее, чем 4 детей?

6. Денис записал в каждой вершине связного графа число. Потом пришёл Стёпа, записал на каждом ребре сумму чисел в вершинах и стёр числа Дениса. Для каких графов Антон гарантированно сможет восстановить числа, написанные Денисом?

7. На листе клетчатой бумаги отмечено некоторое конечное множество M узлов. Всегда ли можно окрасить некоторые точки множества M в красный цвет, а остальные — в синий так, чтобы на каждой линии сетки разность между числом красных и синих узлов по модулю не превосходила 1?

8. Дан белый квадрат 10×10 . За ход можно выбрать 4 белые клетки на пересечении двух строк и двух столбцов и одну из них покрасить. Какое наибольшее количество клеток можно покрасить?

9. В деревне Хамовники у каждого мальчика все знакомые с ним девочки знакомы между собой. У каждой девочки среди её знакомых мальчиков больше, чем девочек. Докажите, что в Хамовниках мальчиков живёт не меньше, чем девочек.

Определение. Граф называется *двудольным*, если его вершины можно раскрасить в два цвета так, чтобы любое ребро соединяло вершины разных цветов.

Упражнение. Является ли дерево двудольным графом?

1. В компании из 100 человек у каждого ровно 3 друга. При каком наименьшем k можно утверждать, что среди любых k людей в этой компании обязательно найдётся пара друзей?

2. Докажите, что граф является двудольным тогда и только тогда, когда все циклы в нём имеют чётную длину.

3. На окружности отмечено 10 точек. Какое наибольшее число отрезков с концами в этих точках можно провести так, чтобы никакие три из этих отрезков не образовывали треугольник с вершинами в этих точках?

4. При каких m и n граф $K_{m,n}$ (т.е. полный двудольный граф, в одной доле которого m , а в другой — n вершин) является планарным?

5. В классе 20 человек. Каждый день либо ровно один ученик заболевает, либо ровно один выздоравливает (дети школу не прогуливают), а если в классе остаётся менее 4 здоровых детей, то уроки отменяются. Могло ли так оказаться, что уроки не отменялись, а в классе присутствовали по разу все возможные наборы из не менее, чем 4 детей?

6. Денис записал в каждой вершине связного графа число. Потом пришёл Стёпа, записал на каждом ребре сумму чисел в вершинах и стёр числа Дениса. Для каких графов Антон гарантированно сможет восстановить числа, написанные Денисом?

7. На листе клетчатой бумаги отмечено некоторое конечное множество M узлов. Всегда ли можно окрасить некоторые точки множества M в красный цвет, а остальные — в синий так, чтобы на каждой линии сетки разность между числом красных и синих узлов по модулю не превосходила 1?

8. Дан белый квадрат 10×10 . За ход можно выбрать 4 белые клетки на пересечении двух строк и двух столбцов и одну из них покрасить. Какое наибольшее количество клеток можно покрасить?

9. В деревне Хамовники у каждого мальчика все знакомые с ним девочки знакомы между собой. У каждой девочки среди её знакомых мальчиков больше, чем девочек. Докажите, что в Хамовниках мальчиков живёт не меньше, чем девочек.