8 класс **Планарные графы** 20 октября 2018

Определение. Связный граф называется *планарным*, если его можно нарисовать на плоскости так, чтобы никакие два ребра не пересекались. Области, на которые граф разбивает плоскость, называются его *гранями*. Неограниченная часть плоскости — тоже грань, так называемая внешняя грань.

1. Формула Эйлера. В любом планарном графе выполнено равенство В−Р+Г= 2, где В — количество вершин, Р — количество рёбер и Г — количество граней. (*Указание: начните с деревьев.*)

2. Докажите, что в планарном графе на В $\geqslant$ 3 вершинах верно
а) 2Р $\geqslant$ 3Г; **б)** Р $\leqslant$ 3В−6.

3. Каждое ребро полного графа на 11 вершинах покрашено в один из двух цветов: красный или синий. Докажите, что либо красный, либо синий граф не является планарным.

4. Докажите, что в любом планарном графе найдётся вершина степени не выше 5.

5. Карта материка разделена на страны по некоторым линиям (можно считать, ломаным). Каждая страна представлена одним связным куском. Докажите, что можно составить 6 альянсов из этих стран так, чтобы страны из одного альянса не являлись соседями.

6. *Фуллерен* — это граф, все степени вершин которого равны 3, а все грани — это пяти- и шестиугольники (например, футбольный мяч).
Найдите количество пятиугольных граней у фуллеренов.

7. На плоскости проведено n различных окружностей так, что каждые две из них пересекаются в двух точках и никакие три из них не имеют общей точки. Докажите, что окружности разбивают плоскость на $n^2 - n + 2$ частей.

8. В планарном графе все вершины имеют степень 4, а также есть ровно m треугольных граней. Найдите наименьшее возможное значение m.

9. В планарном графе $10n$ граней. Докажите, что найдутся n граней с одинаковым количеством рёбер.

8 класс **Планарные графы** 20 октября 2018

Определение. Связный граф называется *планарным*, если его можно нарисовать на плоскости так, чтобы никакие два ребра не пересекались. Области, на которые граф разбивает плоскость, называются его *гранями*. Неограниченная часть плоскости — тоже грань, так называемая внешняя грань.

1. Формула Эйлера. В любом планарном графе выполнено равенство В−Р+Г= 2, где В — количество вершин, Р — количество рёбер и Г — количество граней. (*Указание: начните с деревьев.*)

2. Докажите, что в планарном графе на В $\geqslant$ 3 вершинах верно
а) 2Р $\geqslant$ 3Г; **б)** Р $\leqslant$ 3В−6.

3. Каждое ребро полного графа на 11 вершинах покрашено в один из двух цветов: красный или синий. Докажите, что либо красный, либо синий граф не является планарным.

4. Докажите, что в любом планарном графе найдётся вершина степени не выше 5.

5. Карта материка разделена на страны по некоторым линиям (можно считать, ломаным). Каждая страна представлена одним связным куском. Докажите, что можно составить 6 альянсов из этих стран так, чтобы страны из одного альянса не являлись соседями.

6. *Фуллерен* — это граф, все степени вершин которого равны 3, а все грани — это пяти- и шестиугольники (например, футбольный мяч).
Найдите количество пятиугольных граней у фуллеренов.

7. На плоскости проведено n различных окружностей так, что каждые две из них пересекаются в двух точках и никакие три из них не имеют общей точки. Докажите, что окружности разбивают плоскость на $n^2 - n + 2$ частей.

8. В планарном графе все вершины имеют степень 4, а также есть ровно m треугольных граней. Найдите наименьшее возможное значение m.

9. В планарном графе $10n$ граней. Докажите, что найдутся n граней с одинаковым количеством рёбер.