8 класс **Числовой разнобой** 13 октября 2018

1. Пусть p — простое число. Докажите, что $(2p-1)!-p \,\vdots\, p^2$.

2. Докажите, что если n — не кратное 17 натуральное число, то хотя бы одно из чисел $n^8+1, n^4+1, n^2+1, n+1, n-1$ делится на 17.

3. На гранях куба записали натуральные числа. Затем в каждую вершину записали произведение чисел на трёх прилегающих к ней гранях. Сумма чисел в вершинах оказалась равна 1001. Чему равна сумма чисел на гранях?

4. Существуют ли 2018 натуральных чисел таких, что ни одно из них не делится ни на какое другое, но квадрат любого из этих чисел делится на каждое из остальных?

5. Натуральные числа a, b, c, d таковы, что $ab-cd \,\vdots\, a+b+c+d$. Докажите, что число $a+b+c+d$ — составное.

6. Натуральные числа a, b, c таковы, что $a^2+b^2+c^2$ делится на $a+b+c$. Докажите, что $a^5+b^5+c^5$ делится на $a+b+c$.

7. Натуральные числа m и n таковы, что $m^2+n^2+m \,\vdots\, mn$. Докажите, что m — точный квадрат.

8. а) Денис придумал теорему: «Для любых натуральных чисел a и b существует натуральное n такое, что an — точный куб, bn — точная пятая степень». Верна ли теорема Дениса?

б) Денис подумал ещё немного и придумал апгрейд своей теоремы: «Для любого конечного множества натуральных чисел A существует натуральное n такое, что для любого $a \in A$ число an является точной степенью (выше первой) натурального числа». Верен ли апгрейд?

9. О натуральных числах a, p, q известно, что $ap+1$ делится на q, а $aq+1$ делится на p. Докажите, что $a > \frac{pq}{2(p+q)}$.

10. Докажите, что в числах 2018^k и 2018^k+2^k поровну цифр.

11. Докажите, что для любого простого p существует делящееся на него число вида $2^n+3^n+6^n-1$ при каком-то натуральном n.

8 класс **Числовой разнобой** 13 октября 2018

1. Пусть p — простое число. Докажите, что $(2p-1)!-p \,\vdots\, p^2$.

2. Докажите, что если n — не кратное 17 натуральное число, то хотя бы одно из чисел $n^8+1, n^4+1, n^2+1, n+1, n-1$ делится на 17.

3. На гранях куба записали натуральные числа. Затем в каждую вершину записали произведение чисел на трёх прилегающих к ней гранях. Сумма чисел в вершинах оказалась равна 1001. Чему равна сумма чисел на гранях?

4. Существуют ли 2018 натуральных чисел таких, что ни одно из них не делится ни на какое другое, но квадрат любого из этих чисел делится на каждое из остальных?

5. Натуральные числа a, b, c, d таковы, что $ab-cd \,\vdots\, a+b+c+d$. Докажите, что число $a+b+c+d$ — составное.

6. Натуральные числа a, b, c таковы, что $a^2+b^2+c^2$ делится на $a+b+c$. Докажите, что $a^5+b^5+c^5$ делится на $a+b+c$.

7. Натуральные числа m и n таковы, что $m^2+n^2+m \,\vdots\, mn$. Докажите, что m — точный квадрат.

8. а) Денис придумал теорему: «Для любых натуральных чисел a и b существует натуральное n такое, что an — точный куб, bn — точная пятая степень». Верна ли теорема Дениса?

б) Денис подумал ещё немного и придумал апгрейд своей теоремы: «Для любого конечного множества натуральных чисел A существует натуральное n такое, что для любого $a \in A$ число an является точной степенью (выше первой) натурального числа». Верен ли апгрейд?

9. О натуральных числах a, p, q известно, что $ap+1$ делится на q, а $aq+1$ делится на p. Докажите, что $a > \frac{pq}{2(p+q)}$.

10. Докажите, что в числах 2018^k и 2018^k+2^k поровну цифр.

11. Докажите, что для любого простого p существует делящееся на него число вида $2^n+3^n+6^n-1$ при каком-то натуральном n.