

1. В треугольнике  $ABC$  угол  $A$  равен  $60^\circ$ , а биссектриса угла  $A$ , медиана, проведённая из вершины  $B$ , и высота, проведённая из вершины  $C$ , пересекаются в одной точке. Найдите остальные углы треугольника.

2. На стороне  $BC$  равностороннего треугольника  $ABC$  отмечены точки  $K$  и  $L$ , а на стороне  $AC$  — точка  $M$  так, что  $BK = KL = LC = AM$ . Найдите сумму углов  $\angle AKM + \angle ALM$ .

3. На сторонах  $AB, BC$  и  $AC$  равностороннего треугольника  $ABC$  выбраны точки  $K, M$  и  $N$  соответственно так, что угол  $MKB$  равен углу  $MNC$ , а угол  $KMB$  равен углу  $KNA$ . Докажите, что  $NB$  — биссектриса угла  $MNK$ .

4. Внутри равностороннего треугольника  $ABC$  отмечена точка  $M$  так, что  $\angle AMC = 150^\circ$ . Докажите, что отрезки  $AM, BM$  и  $CM$  таковы, что сумма квадратов двух из них равна квадрату третьего.

5. Дан треугольник  $ABC$ . На стороне  $AB$  как на основании построено во внешнюю сторону равнобедренный треугольник  $ABC'$  с углом при вершине  $120^\circ$ , а на стороне  $AC$  построено во внутреннюю сторону правильный треугольник  $ACB'$ . Точка  $K$  — середина отрезка  $BB'$ . Найдите углы треугольника  $KCC'$ .

6. На боковых сторонах  $AB$  и  $AC$  равнобедренного треугольника  $ABC$  отметили соответственно точки  $K$  и  $L$  так, что  $AK = CL$  и  $\angle ALK + \angle LKB = 60^\circ$ . Докажите, что  $KL = BC$ .

7. Один из углов треугольника равен  $60^\circ$ , а лежащая против него сторона составляет треть периметра. Докажите, что этот треугольник правильный.

8. Двое играют в следующую игру. Первый ставит на плоскости красную точку, второй в ответ ставит 2018 синих точек. Затем первый опять ставит красную точку, второй ставит 2018 синих, и т.д. Запрещено ставить ранее отмеченные точки. Первый выигрывает, если какие-то три красные точки образуют правильный треугольник. Может ли второй ему помешать?

9. Точки  $A_1, B_1, C_1$  лежат на сторонах  $BC, AC, AB$  треугольника  $ABC$  соответственно. Известно, что  $AC_1 = BA_1 = CB_1$  и  $\angle AC_1B_1 = \angle BA_1C_1 = \angle CB_1A_1$ . Докажите, что треугольник  $ABC$  — равносторонний.

10. В треугольнике  $ABC$   $\angle A = 57^\circ$ ,  $\angle B = 61^\circ$ ,  $\angle C = 62^\circ$ . Что длиннее: биссектриса угла  $A$  или медиана, выходящая из вершины  $B$ ?

11. **Теорема Наполеона.** На сторонах произвольного треугольника во внешнюю сторону построены правильные треугольники. Докажите, что их центры образуют правильный треугольник.

1. В треугольнике  $ABC$  угол  $A$  равен  $60^\circ$ , а биссектриса угла  $A$ , медиана, проведённая из вершины  $B$ , и высота, проведённая из вершины  $C$ , пересекаются в одной точке. Найдите остальные углы треугольника.

2. На стороне  $BC$  равностороннего треугольника  $ABC$  отмечены точки  $K$  и  $L$ , а на стороне  $AC$  — точка  $M$  так, что  $BK = KL = LC = AM$ . Найдите сумму углов  $\angle AKM + \angle ALM$ .

3. На сторонах  $AB, BC$  и  $AC$  равностороннего треугольника  $ABC$  выбраны точки  $K, M$  и  $N$  соответственно так, что угол  $MKB$  равен углу  $MNC$ , а угол  $KMB$  равен углу  $KNA$ . Докажите, что  $NB$  — биссектриса угла  $MNK$ .

4. Внутри равностороннего треугольника  $ABC$  отмечена точка  $M$  так, что  $\angle AMC = 150^\circ$ . Докажите, что отрезки  $AM, BM$  и  $CM$  таковы, что сумма квадратов двух из них равна квадрату третьего.

5. Дан треугольник  $ABC$ . На стороне  $AB$  как на основании построено во внешнюю сторону равнобедренный треугольник  $ABC'$  с углом при вершине  $120^\circ$ , а на стороне  $AC$  построено во внутреннюю сторону правильный треугольник  $ACB'$ . Точка  $K$  — середина отрезка  $BB'$ . Найдите углы треугольника  $KCC'$ .

6. На боковых сторонах  $AB$  и  $AC$  равнобедренного треугольника  $ABC$  отметили соответственно точки  $K$  и  $L$  так, что  $AK = CL$  и  $\angle ALK + \angle LKB = 60^\circ$ . Докажите, что  $KL = BC$ .

7. Один из углов треугольника равен  $60^\circ$ , а лежащая против него сторона составляет треть периметра. Докажите, что этот треугольник правильный.

8. Двое играют в следующую игру. Первый ставит на плоскости красную точку, второй в ответ ставит 2018 синих точек. Затем первый опять ставит красную точку, второй ставит 2018 синих, и т.д. Запрещено ставить ранее отмеченные точки. Первый выигрывает, если какие-то три красные точки образуют правильный треугольник. Может ли второй ему помешать?

9. Точки  $A_1, B_1, C_1$  лежат на сторонах  $BC, AC, AB$  треугольника  $ABC$  соответственно. Известно, что  $AC_1 = BA_1 = CB_1$  и  $\angle AC_1B_1 = \angle BA_1C_1 = \angle CB_1A_1$ . Докажите, что треугольник  $ABC$  — равносторонний.

10. В треугольнике  $ABC$   $\angle A = 57^\circ$ ,  $\angle B = 61^\circ$ ,  $\angle C = 62^\circ$ . Что длиннее: биссектриса угла  $A$  или медиана, выходящая из вершины  $B$ ?

11. **Теорема Наполеона.** На сторонах произвольного треугольника во внешнюю сторону построены правильные треугольники. Докажите, что их центры образуют правильный треугольник.