

Отборочная олимпиада

1. Имеется 19 гирек весом 1 г, 2 г, 3 г, ..., 19 г. Девять из них — железные, девять — бронзовые и одна — золотая. Известно, что общий вес всех железных гирек на 90 г больше, чем общий вес бронзовых. Найдите вес золотой гирьки.
2. Пусть H — точка пересечения высот остроугольного треугольника ABC . Оказалось, что $BH = AC$. Найдите возможные значения угла ABC .
3. В клетках квадрата 13×13 расставлены нули и единицы. Оказалось, что в любом квадрате 2×2 сумма чисел четна, а в любом кресте из 5 клеток сумма чисел нечетна. Докажите, что сумма чисел в углах нашего квадрата 13×13 делится на 4.
4. У Толи есть семь различных по массе монет (и он знает какая монета самая тяжелая, какая вторая по массе и т.д.). Лёня может указать на три монеты, и Толя скажет ему, какая из них средняя по весу. Как за n вопросов Лёне найти среднюю по весу монету среди всех семи монет?
(а) (2 балла) $n = 9$;
(б) (5 баллов) $n = 6$.
5. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 составлены девять (не обязательно различных) девятизначных чисел; каждая из цифр использована в каждом числе ровно один раз. На какое наибольшее количество нулей может оканчиваться сумма этих девяти чисел?
6. Имеются четыре краски и бесконечно много квадратных плиточек со стороной длины 1. Разрешается окрашивать стороны плиточек так, чтобы цвета всех сторон у каждой плиточки были разные, и приклеивать плиточки друг к другу сторонами одного цвета. Для каких m и n из этих плиточек можно склеить прямоугольник размера m на n , у которого каждая сторона покрашена одним цветом и цвета всех сторон разные?