# Отборочная олимпиада. Решения.

**1.** Имеется 19 гирек весом 1 г, 2 г, 3 г, …, 19 г. Девять из них — железные, девять — бронзовые и одна — золотая. Известно, что общий вес всех железных гирек на 90 г больше, чем общий вес бронзовых. Найдите вес золотой гирьки.

**Решение.** Разность между общим весом девяти самых тяжёлых гирь и общим весом девяти самых лёгких равна $(19+18+\ldots+11)-(9+8+\ldots+1)=90$ г. Поэтому железные гири самые тяжёлые, а бронзовые самые лёгкие (иначе разность между общим весом железных гирь и общим весом бронзовых была бы меньше). Значит, золотая гирька весит 10 г.

**2.** Пусть $H$ — точка пересечения высот остроугольного треугольника $ABC$. Оказалось, что $BH = AC$. Найдите возможные значения угла $ABC$.

**Решение.** Проведём в треугольнике $ABC$ высоты $AH_A$ и $BH_B$. У прямоугольных треугольников $AH_AC$ и $BH_AH$ равны гипотенузы $BH = AC$, а так же острые углы: $\angle HBH_A = \angle H_BBC = 90^\circ - \angle ACB = \angle CAH_A$. Поэтому треугольники $AH_AC$ и $BH_AH$ равны, а значит равны соответственные стороны $BH_A = AH_A$. В прямоугольном треугольнике $ABH_A$ равны стороны $AH_A = BH_A$, то есть он равнобедренный, а значит $\angle ABC = \angle ABH_A = 45^\circ$.

**3.** В клетках квадрата $13\times13$ расставлены нули и единицы. Оказалось, что в любом квадрате $2\times2$ сумма чисел четна, а в любом кресте из 5 клеток сумма чисел нечетна. Докажите, что сумма чисел в углах нашего квадрата $13\times13$ делится на 4.

**Решение.**

Рассмотрим четыре фигурки на доске — два обведённых квадрата $2\times2$ и два креста с центрами в клетках 1 и 2 (рис. 1). В квадратах сумма чисел чётна, а в крестах — нечётна. Обозначим за $A$ сумму чисел в серых клетках, а за $B$ — в белых. Сложим суммы чисел в этих четырёх фигурках. Так как там ровно два креста, то сумма чётна. При этом каждая клетка, кроме двух серых, встречается ровно в двух фигурках, а значит эта сумма равна $A+2B$, то есть $A$ чётно. Поэтому числа в серых клетках равны. Заметим, что от числа в углу таблицы $13\times13$ можно дойти до числа в центре за 6 ходов по диагонали, то есть за два прыжка по три хода. Сдвиг на три хода по диагонали числа не меняет, значит числа в углах таблицы равны числу в центре и все равны $x$. Поэтому их сумма равна $4x$, то есть делится на 4.

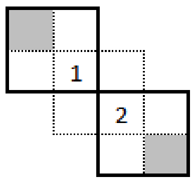


Рис. 1

**4.** У Толи есть семь различных по массе монет (и он знает какая монета самая тяжелая, какая вторая по массе и т.д.). Лёня может указать на три монеты, и Толя скажет ему, какая из них средняя по весу. Как за $n$ вопросов Лёне найти среднюю по весу монету среди всех семи монет?

**(a)** **(2 балла)** $n = 9$;
**(b)** **(5 баллов)** $n = 6$.

**Решение пункта (b)** Пронумеруем монеты от 1 до 7. В начале укажем на монеты 1, 2, 3. По итогам этого хода мы возьмем две несредние монеты и укажем на них вместе с монетой номер 4. Получившиеся две несредние монеты будут наибольшей и наименьшей монетами из первой четверки монет. Третьим ходом сравним их с пятой монетой. Таким образом мы найдем наибольшую и наименьшую монеты среди первых пяти. Очевидно, что среди них нет искомой средней монеты (выкинем их из рассмотрения). Таким образом у нас осталось три хода и пять монет. За два хода мы сможет найти наибольшую и наименьшую монеты среди четырех монет (и также выкинем их из рассмотрения). Последним ходом найдем среднюю монету.

**5.** Из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 составлены девять (не обязательно различных) девятизначных чисел; каждая из цифр использована в каждом числе ровно один раз. На какое наибольшее количество нулей может оканчиваться сумма этих девяти чисел?

**Решение.** Оценка. Пусть сумма оканчивается на девять нулей. Каждое из составленных чисел делится на 9, поскольку сумма его цифр делится на 9. Поэтому их сумма также делится на 9. Наименьшее натуральное число, делящееся на 9 и оканчивающееся на девять нулей, равно $9 \cdot 10^9$, так что сумма наших чисел не меньше $9 \cdot 10^9$. Значит, одно из них не меньше $10^9$. Противоречие.
Пример с восемью нулями: $8 \cdot 987654321 + 198765432 = 81 \cdot 10^8$.

**6.** Имеются четыре краски и бесконечно много квадратных плиточек со стороной длины 1. Разрешается окрашивать стороны плиточек так, чтобы цвета всех сторон у каждой плиточки были разные, и приклеивать плиточки друг к другу сторонами одного цвета. Для каких $m$ и $n$ из этих плиточек можно склеить прямоугольник размера $m$ на $n$, у которого каждая сторона покрашена одним цветом и цвета всех сторон разные?

**Решение.** Ответ: при $n$ и $m$ одинаковой чётности.

Оценка: не умаляя общности положим, что $n$ чётно, а $m$ нечётно, и пусть у нас получилось сложить прямоугольник $n \times m$. Тогда возьмём какую-нибудь сторону длины $n$ и рассмотрим граф, в котором вершинами являются плиточки прямоугольника, и две плиточки соединены ребром тогда и только тогда, когда они имеют общую сторону того же цвета, что и выбранная сторона прямоугольника. Тогда у всех плиточек, прилегающих к выбранной стороне степень 0, а у всех остальных 1. Сумма степеней вершин в этом графе равна $m(n-1)$, то есть нечётна, что невозможно.

Пример: выложим прямоугольник $n \times m$ из плиточек, и будем красить линии сетки, раскрашивая за раз общую сторону у двух плиточек. Если $n$ и $m$ оба нечётны, то раскрасим вертикальные линии сетки красками 1 и 2 с чередованием цветов в горизонтальном направлении, начиная с 1 (в одной строчке будут цвета 1 2 1 2 ...). Аналогично раскрасим в цыета 3 и 4 горизонтальные линии сетки. Заметим, что стороны каждой плиточки будут покрашены во все четыре цвета, и противоположные стороны прямоугольника будут покрашены в разные цвета, поскольку количество вертикальных (горизонтальных) линий в строчке (столбце) чётно.

Если $n$ и $m$ оба чётны, то разобьём прямоугольник на квадраты $2 \times 2$, и раскрасим их вертикальные стороны в цвета 1 и 2, а горизонтальные в 3 и 4, любым способом, чтобы верхняя и нижняя стороны были покрашены в цвета 3 и 4 соответственно, а правая и левая — в 1 и 2. Далее внутри каждого квадрата $2 \times 2$ есть четыре не покрашенных линии сетки, каждая из которых примыкает к своей стороне. Рассмотрим соответствие $1 \leftrightarrow 2,\ 3 \leftrightarrow 4$, и покрасим каждую не раскрашенную линию в цвет, соответствующий цвету примыкающей стороны. Тогда каждая плиточка в квадрате $2 \times 2$ будет покрашена во все цвета, и значит мы получили требуемую раскраску.