

Дискретная непрерывность

Важная задача. Несколько целых чисел выписали в ряд так, что любые два соседних числа отличаются не более, чем на единицу. Более того, первое число отрицательно, а последнее — положительно. Докажите, что среди этих чисел есть число 0.

1. В ряд выложено 50 белых и 50 черных шариков. Самый левый и самый правый шарики — белые. Докажите, что можно отсчитать несколько (но не все!) шариков, начиная с левого, так, чтобы среди них оказалось поровну черных и белых.
2. После первого тайма футбольного матча счет был $0 : 1$, а закончилась игра со счетом $5 : 4$. Докажите, что в какой-то момент матча счет был ничейным.
3. Белка прятала орехи вдоль прямой. Известно, что от каждого тайника к следующему она пробежала не больше 3 метров. Известно, что расстояние от первого тайника до последнего равно 100 м. Докажите, что найдутся два тайника, расстояния между которыми не меньше 22 метров и не больше 25 метров.
4. (а) Существуют ли 1000 последовательных натуральных чисел, среди которых нет ни одного простого числа?
(б) Существуют ли 1000 последовательных натуральных чисел, среди которых ровно 5 простых чисел?
5. На клетчатой доске 100×100 половина клеток белые, а половина — черные.
(а) Докажите, что можно разрезать ее по границам клеток на две части с равным числом черных клеток.
(б*) Докажите, что можно разрезать ее по границам клеток на две **равные** части с равным числом черных клеток.
6. За круглым столом сидит четное количество гномов в колпаках с помпонами, причем, у любых двух рядом сидящих гномов количество помпонов отличается не больше, чем на 1. Докажите, что найдется пара гномов, сидящих напротив друг друга, у которых количество помпонов на колпаках отличается не больше, чем на 1.
7. В некоторых клетках квадратной таблицы 10×10 расставлены числа $+1$ и -1 таким образом, что сумма всех чисел в таблице по абсолютной величине не превосходит 27. Докажите, что в некотором квадрате 5×5 сумма чисел по абсолютной величине не превосходит 5.
8. По кругу стоят n мальчиков и n девочек. Назовём пару из мальчика и девочки хорошей, если на одной из дуг между ними стоит поровну мальчиков и девочек (в частности, стоящие рядом мальчик и девочка образуют хорошую пару). Оказалось, что есть девочка, которая участвует ровно в 10 хороших парах. Докажите, что есть и мальчик, который участвует ровно в 10 хороших парах.