Добавка

1. Имеют ли решения в целых числах уравнения
(a) $8x + 12y = 6$;
(b) $4x + 9y = 15$;
(c) $6x + 15y + 10z = 49$;
(d*) $29x + 30y + 31z = 366$?

2. Пусть $ax - by = c$ — уравнение в целых числах. Докажите, что
(a) Уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда $c \,\vdots\, (a, b)$;
(b) Если (x_0, y_0) — решение, то все остальные решения имеют вид

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{(a,b)}t, \\ y = y_0 + \frac{a}{(a,b)}t, \end{cases}$$

где $t \in \mathbb{Z}$.
(c) Нам известно, что для любых целых чисел a и b найдутся такие целые числа x, y, что $ax + by = (a, b)$. Докажите, что существуют коэффициенты, удовлетворяющие неравенствам $|x| < \left|\frac{b}{(a,b)}\right|$ и $|y| < \left|\frac{a}{(a,b)}\right|$.

3. Пусть a, b, c, d — целые числа со свойством, что для любых двух целых чисел m и n существуют целые числа x и y, удовлетворяющие системе:

$$\begin{cases} ax + by = m, \\ cx + dy = n. \end{cases}$$

Докажите, что $ad - bc = \pm 1$.

4. Решите в целых числах уравнения:
(a)

$$x + y + z + xyz = xy + yz + zx + 2;$$

(b)

$$x^2(y - z) + y^2(z - x) + z^2(x - y) = 2.$$

5. Последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots$ удовлетворяет условию $(a_i, a_j) = (i, j)$ для любых $i \neq j$. Докажите, что $a_i = i$ для всех i.