НОД и его разложение

Обозначение $(a, b) = \text{НОД}\,(a, b)$.

1. Найдите НОД всех чисел, в записи которых все цифры $1, 2, \ldots, 9$ использованы по одному разу.

2. **Алгоритм Евклида.** На доске написаны числа a и b. Каждую минуту Арсений заменяет большее из них на разность этих чисел. Докажите, что:

(a) Общие делители у чисел на доске всегда одни и те же;

(b) Арсений не сможет получить натуральное число, меньшее (a, b);

(c) В какой-то момент на доске будет написан 0;

(d) Вместе с нулём на доске будет написано число (a, b);

3. Найдите $(\underbrace{11..11}_{51}, \underbrace{11..11}_{81})$.

4. Пусть $(m, 360) = 1$. Кроме того, пусть на плоскости дан угол в m градусов. Докажите, что при помощи одного только циркуля можно построить угол в 1 градус.

5. На доске написаны взаимно простые числа m и n. Каждую минуту модуль разности этих чисел записывается вместо наибольшего из них. Докажите, что в какой-то момент на доске будут написаны две единицы.

6. **Соотношение Безу.** Для любых целых чисел a и b найдутся такие целые числа x, y, что $ax + by = (a, b)$.

7. У Влада есть 25 мензурок: 1 мл, 2 мл, 3 мл, ..., 25 мл. Он хочет выбрать 10 из них так, чтобы с помощью любых двух мог бы отмерить 1 мл. Сколько есть способов это сделать?

8. На доске написано два различных натуральных числа a, b. Меньшее из них стирается и заменяется на число $\frac{ab}{|a-b|}$. Докажите, что в какой-то момент времени на доске окажутся два равных числа.

9. Докажите, что для любых взаимно простых чисел a и b найдутся такие целые p и q, что числа $p + na$ и $q + nb$ взаимно просты при любом натуральном n.

10. Аня нашла себе интересное занятие. Она написала на доске две единички, потом между ними написала их сумму. Ее это так захватило, что она продолжила: брала ряд чисел, который у нее получился на предыдущем шаге, и между двумя соседними числами писала их сумму (старые числа при этом не стирала). Сколько раз она выписала произвольное число n?