НОД и его разложение

Обозначение $(a, b) =$ НОД (a, b).

1. Найдите НОД всех чисел, в записи которых все цифры $1, 2, \ldots, 9$ использованы по одному разу.

2. **Алгоритм Евклида.** На доске написаны числа a и b. Каждую минуту Арсений заменяет большее из них на разность этих чисел. Докажите, что:

(a) Общие делители у чисел на доске всегда одни и те же;

(b) Арсений не сможет получить натуральное число, меньшее (a, b);

(c) В какой-то момент на доске будет написан 0;

(d) Вместе с нулём на доске будет написано число (a, b);

3. Найдите $(\underbrace{11..11}_{51}, \underbrace{11..11}_{81})$.

4. Найдите $(2019^n - 1, 2019^k - 1)$.

5. Пусть $(m, 360) = 1$. Кроме того, пусть на плоскости дан угол в m градусов. Докажите, что при помощи одного только циркуля можно построить угол в 1 градус.

6. Найти наибольшее натуральное n такое, что $n^3 + 100 \,\vdots\, n + 10$.

7. На доске написаны взаимно простые числа m и n. Каждую минуту модуль разности этих чисел записывается вместо наибольшего из них. Докажите, что в какой-то момент на доске будут написаны две единицы.

8. **Соотношение Безу.** Для любых целых чисел a и b найдутся такие целые числа x, y, что $ax + by = (a, b)$.

9. На доске написано два различных натуральных числа a, b. Меньшее из них стирается и заменяется на число $\frac{ab}{|a-b|}$. Докажите, что в какой-то момент времени на доске окажутся два равных числа.

10. Докажите, что для любых взаимно простых чисел a и b найдутся такие целые p и q, что числа $p + na$ и $q + nb$ взаимно просты при любом натуральном n.