Индукция

Упражнения

1. Докажите: $1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2$

2. Докажите, что правильный треугольник можно разрезать на любое количество правильных, большее 5.

Алгебра

1. Докажите:
(a) $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
(b) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
(c) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$

2. Для каких натуральных n выполняется неравенство: $2^n > n^2$

3. Известно, что $x + \frac{1}{x}$ – целое число. Докажите, что $x^n + \frac{1}{x^n}$ – также целое при любом целом n.

4. Докажите, что любое натуральное число представимо в виде суммы различных элементов Фибоначчи.

5. Докажите, что $n^n > (n+1)^{n-1}$, при $n > 1$.

6. Покажите, что любое число представимо в виде $*1^2 * 2^2 * 3^2 * \cdots * n^2$, для некоторого n и выбора $+$ или $-$ вместо каждой $*$.

7. Докажите, что при $n > 2$, число $n!$ можно представить в виде суммы n его различных делителей.

8. Дана бесконечная возрастающая последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ Известно, что $a_2 = 2$ и $a_{nm} = a_n a_m$ для каждой пары взаимно простых $m > 1$ и $n > 1$. Докажите, что $a_n = n$ для всех n.

Комбинаторика

1. Треугольник разбили n отрезками с концами на сторонах. Докажите, что среди получившихся областей есть хотя бы один треугольник.

2. Докажите, что для любого натурального n можно разбить квадрат со стороной 2^n без угловой клетки на трехклеточные уголки.

3. В прямоугольнике $3 \times n$ стоят фишки трёх цветов, по n штук каждого цвета. Доказать, что можно переставить фишки в каждой строке так, чтобы в каждом столбце были фишки всех цветов.

4. n человек не знакомы между собой. Нужно так познакомить друг с другом некоторых из них, чтобы ни у каких трёх людей не оказалось одинакового числа знакомых. Докажите, что это можно сделать при любом n.

5. В выпуклом n-угольнике ($n \geqslant 3$) вершины покрашены в три цвета таким образом, что каждый цвет присутствует, причём никакие две соседние вершины не покрашены в один цвет. Докажите, что его можно разбить не пересекающимися диагоналями на треугольники, в каждом из которых вершины покрашены в разные цвета.

6. Сколькими различными способами можно разбить лестницу высоты n на несколько прямоугольников, стороны которых идут по линиям сетки, а площади попарно различны?

7. n разбойников делят добычу. У каждого из них свое мнение о ценности той или иной доли добычи, и каждый из них хочет получить не меньше, чем $\frac{1}{n}$ долю добычи (со своей точки зрения). Придумайте, как разделить добычу между разбойниками.