Обратные остатки

1. Решите сравнения (найдите все подходящие x и докажите, что других нет):
(a) $5x \equiv 2 \pmod 3$;
(b) $3x \equiv 2 \pmod{11}$;
(c) $6x \equiv 1 \pmod{13}$.

2. Какой остаток дает $x + y$ при делении на 17, если
(a) $x - 16y \equiv 2 \pmod{17}$;
(b) $3x \equiv 5 + 14y \pmod{17}$?

3. Дано простое число p и его некоторый ненулевой остаток a.
(a) Докажите, что в последовательности $0 \cdot a$, $1 \cdot a$, $2 \cdot a$, ..., $(p-1) \cdot a$ все числа дают разные остатки по модулю p.
(b) Докажите, что существует и при том единственный остаток b, что $ab \underset{p}{\equiv} 1$ (такой остаток b называется *обратным* остатка a).
(c) Какие остатки совпадают со своими обратными остатками?

4. **(a)** **(Теорема Вильсона)** Пусть p — некоторое простое число. Докажите, что $(p-1)! \underset{p}{\equiv} -1$.
(b) **(Обратная теорема Вильсона)** Докажите, что если $(n-1)! \underset{n}{\equiv} -1$, то число n — простое.

5. Пусть $a_1, \ldots, a_p$ — конечная арифметическая прогрессия с разницей, не кратной p. Докажите, что существует некоторый член a_k, такой что $a_k + a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_p$ делится на p^2.

6. Пусть p — простое число. Докажите, что $(p-k)! \cdot (k-1)! \underset{p}{\equiv} (-1)^k$.

7. Даны натуральные числа a, b и c такие, что $ab + 9b + 81$ и $bc + 9c + 81$ делятся на 101. Докажите, что тогда и $ca + 9a + 81$ тоже делится на 101.

8. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — все остатки при деление на n, такие, что у каждого из них есть обратный остаток.
(a) Докажите, что $a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_k \underset{n}{\equiv} \pm 1$;
(b) **(Обобщение Гаусса теоремы Вильсона)** Докажите, что

$$a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_k \equiv \begin{cases} -1 \pmod n, & n = 4,\ p^\alpha,\ 2p^\alpha\,; \\ \ \ 1 \pmod n, & n \neq 4,\ p^\alpha,\ 2p^\alpha\,. \end{cases}$$

9. **(a)** Преобразуем сумму $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{100}$ в дробь $\frac{m}{n}$. Докажите, что m делится на 101.
(b) Преобразуем сумму

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{(p-1)^2}$$

в дробь $\frac{m}{n}$. Докажите, что m делится на p.
(c) Преобразуем сумму

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p-1}$$

в дробь $\frac{m}{n}$. Докажите, что m делится на p^2.
(d) **(Теорема Вольстенхольма)** Докажите, что для любого простого числа $p > 3$ выполняется сравнение

$$C_{2p}^{p} \equiv 2 \pmod{p^3}.$$