Сравнения

Определение. Если два числа дают одинаковые остатки при делении на число n, то говорят, что они сравнимы по модулю m.
Записывают это так: $a \underset{m}{\equiv} b$ или $a \equiv b\,(mod\,m)$.

Упражнение. Числа a и b сравнимы по модулю n тогда и только тогда, когда число $a-b$ сравнимо с 0 по модулю n.

Свойства сравнений.

1. если $a \underset{m}{\equiv} b$, $b \underset{m}{\equiv} c$, то $a \underset{m}{\equiv} c$;
2. $a \underset{m}{\equiv} a + km$, где k — целое число;
3. если $a \underset{m}{\equiv} b$, то $a + c \underset{m}{\equiv} b + c$;
4. если $a \underset{m}{\equiv} b$ и $c \underset{m}{\equiv} d$, то $a + c \underset{m}{\equiv} b + d$;
5. если $a \underset{m}{\equiv} b$, то $ac \underset{m}{\equiv} bc$;
6. если $a \underset{m}{\equiv} b$ и $c \underset{m}{\equiv} d$, то $ac \underset{m}{\equiv} bd$;
7. если $a \underset{m}{\equiv} b$, то $a^k \underset{m}{\equiv} b^k$, где k — натуральное число.

1. Найдите остаток от деления:
(a) $2015 \cdot 2016 \cdot 2017 \cdot 2018 \cdot 2019$ на 11.
(b) $1001 \cdot 1002 \cdot 1003 + 2001 \cdot 2002 \cdot 2003 \cdot 2004$ на 1000.
(c) $2016 \cdot 2017 \cdot 2018 + 2020 \cdot 2021 \cdot 2022$ на 2019.

2. Пусть a, b, c, d и n — натуральные числа, причем $a+b$ и $c+d$ делятся на n. Докажите, что $ac - bd$ делится на n.

3. Найдите остаток от деления:
(a) $9^{2019} + 13^{2019}$ на 11.
(b) $9^{2018} + 13^{2018}$ на 11.

4. Докажите, что **(a)** $2^{2018} \underset{5}{\equiv} 3^{2018}$; **(b)** $2^{2016} \underset{13}{\equiv} 3^{2016}$; **(c)** найдите еще хотя бы одно простое число p, для которого $2^{2016} \underset{p}{\equiv} 3^{2016}$.

5. Пусть A — произведение всех нечётных чисел от 1 до 2017, а B — произведение всех чётных чисел от 2 до 2018. Докажите, что $A + B$ делится на 2019.

6. Вася выписал в тетрадку числа вида $100\ldots01$ (иными словами, числа вида $10^k + 1$), меньшие 10^{2019}. Докажите, что простых из них не более 1% от общего числа.

7. Натуральные числа a и b таковы, что $a^{12} + b^{12}$ и $a^{125} + b^{125}$ делятся на 257. Докажите, что $a^{2019} + b^{2019}$ делится на 257.

8. Число $1\underbrace{33...33}_{k}$ — простое. Докажите, что k — нечетное.

9. Дано четное число a. Докажите, что существует бесконечно много нечетных натуральных чисел n таких, что $a^n + n$ — составное число.

10. В ряду чисел $1, 501, 751, 876, 438, ...$ каждое число, кроме первого, равно половине предыдущего, если предыдущее четно, и половине предыдущего числа, увеличенного на 1001, в противном случае. Верно ли, что в этом ряду встретятся все натуральные числа от 1 до 1000?

11. Найдите все натуральные m, такие что число $(2^{2m+1})^2 + 1$ имеет не более двух различных простых делителей.