

Сравнения

Определение. Если два числа дают одинаковые остатки при делении на число n , то говорят, что они сравнимы по модулю m .

Записывают это так: $a \equiv b$ или $a \equiv b \pmod{m}$.

Упражнение. Числа a и b сравнимы по модулю n тогда и только тогда, когда число $a - b$ сравнимо с 0 по модулю n .

Свойства сравнений.

- если $a \equiv b$, $b \equiv c$, то $a \equiv c$;
 - $a \equiv a + km$, где k — целое число;
 - если $a \equiv b$, то $a + c \equiv b + c$;
 - если $a \equiv b$ и $c \equiv d$, то $a + c \equiv b + d$;
 - если $a \equiv b$, то $ac \equiv bc$;
 - если $a \equiv b$ и $c \equiv d$, то $ac \equiv bd$;
 - если $a \equiv b$, то $a^k \equiv b^k$, где k — натуральное число.
- Найдите остаток от деления:
(а) $2015 \cdot 2016 \cdot 2017 \cdot 2018 \cdot 2019$ на 11.
(б) $1001 \cdot 1002 \cdot 1003 + 2001 \cdot 2002 \cdot 2003 \cdot 2004$ на 1000.
(с) $2016 \cdot 2017 \cdot 2018 + 2020 \cdot 2021 \cdot 2022$ на 2019.
 - Пусть a, b, c, d и n — натуральные числа, причем $a + b$ и $c + d$ делятся на n . Докажите, что $ac - bd$ делится на n .
 - Найдите остаток от деления:
(а) $9^{2019} + 13^{2019}$ на 11.
(б) $9^{2018} + 13^{2018}$ на 11.
 - Докажите, что (а) $2^{2018} \equiv 3^{2018} \pmod{5}$; (б) $2^{2018} \equiv 3^{2018} \pmod{13}$; (с) найдите еще хотя бы одно простое число p , для которого $2^{2018} \equiv 3^{2018} \pmod{p}$.
 - Пусть A — произведение всех нечётных чисел от 1 до 2017, а B — произведение всех чётных чисел от 2 до 2018. Докажите, что $A + B$ делится на 2019.

- Вася выписал в тетрадку числа вида $100 \dots 01$ (иными словами, числа вида $10^k + 1$), меньшие 10^{2019} . Докажите, что простых из них не более 1% от общего числа.
- Натуральные числа a и b таковы, что $a^{12} + b^{12}$ и $a^{125} + b^{125}$ делятся на 257. Докажите, что $a^{2019} + b^{2019}$ делится на 257.
- Число $1 \underbrace{33 \dots 33}_k$ — простое. Докажите, что k — нечетное.
- Дано четное число a . Докажите, что существует бесконечно много нечетных натуральных чисел n таких, что $a^n + n$ — составное число.
- В ряду чисел 1, 501, 751, 876, 438, ... каждое число, кроме первого, равно половине предыдущего, если предыдущее четно, и половине предыдущего числа, увеличенного на 1001, в противном случае. Верно ли, что в этом ряду встретятся все натуральные числа от 1 до 1000?
- Найдите все натуральные m , такие что число $(2^{2m+1})^2 + 1$ имеет не более двух различных простых делителей.