

## Сравнения

**Определение.** Если два числа дают одинаковые остатки при делении на число  $n$ , то говорят, что они сравнимы по модулю  $m$ .

Записывают это так:  $a \equiv b$  или  $a \equiv b \pmod{m}$ .

**Упражнение.** Числа  $a$  и  $b$  сравнимы по модулю  $n$  тогда и только тогда, когда число  $a - b$  сравнимо с 0 по модулю  $n$ .

### Свойства сравнений.

1. если  $a \equiv b$ ,  $b \equiv c$ , то  $a \equiv c$ ;
2.  $a \equiv a + km$ , где  $k$  — целое число;
3. если  $a \equiv b$ , то  $a + c \equiv b + c$ ;
4. если  $a \equiv b$  и  $c \equiv d$ , то  $a + c \equiv b + d$ ;
5. если  $a \equiv b$ , то  $ac \equiv bc$ ;
6. если  $a \equiv b$  и  $c \equiv d$ , то  $ac \equiv bd$ ;
7. если  $a \equiv b$ , то  $a^k \equiv b^k$ , где  $k$  — натуральное число.

1. Найдите остаток от деления:  
(а)  $2015 \cdot 2016 \cdot 2017 \cdot 2018 \cdot 2019$  на 11.  
(б)  $1001 \cdot 1002 \cdot 1003 + 2001 \cdot 2002 \cdot 2003 \cdot 2004$  на 1000.  
(с)  $2016 \cdot 2017 \cdot 2018 + 2020 \cdot 2021 \cdot 2022$  на 2019.
2. Пусть  $a, b, c, d$  и  $n$  — натуральные числа, причем  $a + b$  и  $c + d$  делятся на  $n$ . Докажите, что  $ac - bd$  делится на  $n$ .
3. Найдите остатки от деления числа  $2^{2019}$  (а) на 3, 5, 7; (б) на 15, 17.
4. Докажите, что  $2222^{5555} + 5555^{2222}$  делится на 7.
5. Найдите остаток от деления:  
(а)  $9^{2019} + 13^{2019}$  на 11.  
(б)  $9^{2018} + 13^{2018}$  на 11.
6. Докажите, что (а)  $2^{2018} \equiv 3^{2018} \pmod{5}$ ; (б)  $2^{2018} \equiv 3^{2018} \pmod{13}$ ; (с) найдите еще хотя бы одно простое число  $p$ , для которого  $2^{2018} \equiv 3^{2018} \pmod{p}$ .
7. (а) Докажите, что  $a^n - b^n$  делится на  $a - b$ .  
(б) Докажите, что при нечётном  $n$   $a^n + b^n$  делится на  $a + b$ .

8. Пусть  $A$  — произведение всех нечётных чисел от 1 до 2017, а  $B$  — произведение всех чётных чисел от 2 до 2018. Докажите, что  $A + B$  делится на 2019.
9. Вася выписал в тетрадку числа вида  $100 \dots 01$  (иными словами, числа вида  $10^k + 1$ ), меньшие  $10^{2019}$ . Докажите, что простых из них не более 1% от общего числа.
10. Натуральные числа  $a$  и  $b$  таковы, что  $a^{12} + b^{12}$  и  $a^{125} + b^{125}$  делятся на 257. Докажите, что  $a^{2019} + b^{2019}$  делится на 257.
11. Число  $1 \underbrace{33 \dots 33}_k$  — простое. Докажите, что  $k$  — нечетное.