

## Неравенства

Пусть  $a > 0$ ,  $b > 0$ . Тогда справедливы **неравенства между средними**:

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}},$$

причём эти неравенства обращаются в равенства в том и только в том случае, когда  $a = b$ . Четыре выписанные величины называются соответственно *средним гармоническим*, *средним геометрическим*, *средним арифметическим* и *средним квадратическим* чисел  $a$  и  $b$ .

### Стоит свернуть полный квадрат

- Докажите неравенство между средним арифметическим и средним квадратическим.
- Пусть  $x > 1$ . Что больше:  $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}$  или  $2\sqrt{x}$ ?

### Подстановка в известные неравенства

- Докажите неравенство между средним гармоническим и средним геометрическим.
- При каких  $x$  дробь  $(81 + 16x^4)/x^2$  принимает наименьшее значение?

### Суммирование известных неравенств

- Докажите неравенство для положительных значений переменных

$$(ab + bc + ca)^2 \geq 3abc(a + b + c).$$

- Докажите неравенство для положительных значений переменных

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e).$$

## Разные задачи

- Пусть  $x + y = 1$ . Докажите, что  $x^8 + y^8 \geq 1/128$ .
- Докажите, что если  $x > 0$ ,  $y > 0$ ,  $z > 0$  и  $xy + yz + xz \geq 12$ , то  $x + y + z \geq 6$ .
- Решите уравнение  $x^4 + y^4 + 2 = 4xy$ .
- Докажите, что для положительных чисел  $a$ ,  $b$ ,  $c$  таких что,  $a + b + c = 1$ , выполнено неравенство

$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} \geq \frac{2}{1+a} + \frac{2}{1+b} + \frac{2}{1+c}.$$

- Для неотрицательных чисел  $x$  и  $y$ , не превосходящих 1, докажите, что

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \leq \frac{2}{\sqrt{1+xy}}.$$