

Комбинаторные доказательства

Примеры

1. $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.
2. $C_m^k \cdot C_n^m = C_n^k \cdot C_{n-k}^{m-k}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Докажите тождества:
 - (a) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^n = 2^n$;
 - (b) $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots$;
 - (c) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + C_n^4 - \dots + (-1)^k \cdot C_n^k = (-1)^k \cdot C_{n-1}^k$;
 - (d) $C_n^0 \cdot 2^0 + C_n^1 \cdot 2^1 + \dots + C_n^n \cdot 2^n = 3^n$.
2. Докажите тождества:
 - (a) $C_n^1 + 6 \cdot C_n^2 + 6 \cdot C_n^3 = n^3$;
 - (b) $C_n^1 + 14 \cdot C_n^2 + 36 \cdot C_n^3 + 24 \cdot C_n^4 = n^4$.
3. Вычислите суммы:
 - (a) $C_k^k + C_{k+1}^k + \dots + C_n^k$;
 - (b) $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + 4C_n^4 + \dots$;
 - (c) $C_n^1 + 2^2 C_n^2 + 3^2 C_n^3 + 4^2 C_n^4 + \dots$;
 - (d) $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \dots + (C_n^n)^2$;
 - (e) $C_n^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 + \dots$