

Считаем ребра в графах

1. На занятие кружка пришли 24 школьника, среди них отличник Егор. Руководитель спросил у каждого из них, кроме Леша, сколько у них знакомых среди остальных пришедших. В ответ прозвучали только числа 3 и 5. Докажите, что Леша с кем-нибудь знаком.
2. В некотором городе на каждом перекрёстке сходятся ровно три улицы. Улицы раскрашены в три цвета так, что на каждом перекрёстке сходятся улицы трёх разных цветов. Из города выходят три дороги. Докажите, что они имеют разные цвета.
3. Можно ли расставить 777 шахматных коней на доске 2018×2018 так, чтобы каждый из них бил ровно 4 других?
4. В компании пять эльфов, пять гномов и один хоббит. У каждого эльфа по семь знакомых в этой компании, а у каждого гнома по два. Сколько знакомых в этой компании у хоббита?
5. (а) Докажите, что среди любых шести человек есть либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.
(б) Докажите, что среди любых девяти человек есть либо четверо попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.
6. Есть семь человек, любых шестерых можно посадить за круглый стол так, чтобы каждый сидел рядом с двумя своими друзьями. Докажите, что можно так посадить всех семерых, что каждый будет сидеть рядом со своими друзьями.
7. В графе 100 вершин, нет треугольников, степень каждой вершины больше 40. Доказать, что в этом графе нет циклов длины 5.
8. Какое наибольшее число рёбер может быть в 90-вершинном графе, в котором
(а) нет треугольников;
(б) нет полного подграфа из четырёх вершин?
9. В стране 2000 городов. Каждый город связан беспосадочными двусторонними авиалиниями с некоторыми другими городами, причём для каждого города число исходящих из него авиалиний есть степень двойки (то есть 1, 2, 4, ...). Для каждого города А статистик подсчитал количество маршрутов, имеющих не более одной пересадки, связывающих А с другими городами, а затем просуммировал полученные результаты по всем 2000 городам. У него получилось 100000. Докажите, что статистик ошибся.