

Делимость и остатки

1. Камни лежат в трёх кучках: в одной — 51 камень, в другой — 49 камней, а в третьей — 5 камней. Разрешается объединять любые кучки в одну, а также разделять кучку из чётного количества камней на две равные. Можно ли получить 105 кучек по одному камню в каждой?
2. Шайка разбойников отобрала у купца мешок монет. Каждая монета стоит целое число грошей. Оказалось, что какую бы монету ни отложить, оставшиеся монеты можно разделить между разбойниками так, чтобы каждый получил одинаковую сумму в грошах. Докажите, что если отложить одну монету, то число монет разделится на число разбойников.
3. Дана бесконечная вправо последовательность цифр и натуральное число l . Докажите, что можно выбрать несколько цифр подряд, образующих число, делящееся на l , если
 - (а) $l = 9$;
 - (б) l — нечетное число, не делящееся на 5.
4. На Луне имеют хождение монеты достоинством в 1, 15 и 50 фертингов. Незнайка отдал за покупку несколько монет и получил сдачу — на одну монету больше. Какова наименьшая возможная цена покупки?
5. Все натуральные числа выписали подряд без промежутков на бесконечную ленту: 123456789101112.... Затем ленту разрезали на полоски по 7 цифр в каждой. Докажите, что любое семизначное число
 - (а) встретится хотя бы на одной из полосок;
 - (б) встретится на бесконечном числе полосок.
6. На столе в ряд лежат 36 различных карт. Над ними производят магическую операцию, в результате которой первая карта оказывается на месте под номером n_1 , вторая — на месте под номером n_2 , и так вплоть до 36-й, которая оказывается на месте n_{36} (n_1, \dots, n_{36} — попарно различные числа от 1 до 36). Когда эту операцию сделали 5 раз, все карты оказались в исходном положении.
 - (а) Верно ли, что существует карта, всё время остававшаяся на своём месте? Сколько таких карт могло быть?
 - (б) Тот же вопрос, если 5 заменить на 25.
 - (с) А если добавить условие, что на 25-й раз карты впервые окажутся в исходном положении?