Отборочная олимпиада

1. Двое играют в следующую игру. Петя выписывает на доску 5 ненулевых цифр, затем Вася выписывает на доску еще одну ненулевую цифру. Если из выписанных 6 цифр можно составить число, которое является делителем числа $\underbrace{1\ldots1}_{2018}$, то выигрывает Петя, иначе — Вася. Кто выиграет при правильной игре?

2. Сфинкс загадал три произвольных натуральных числа x, y, z. Если путник назовёт Сфинксу три натуральных числах a, b и c, то сфинкс скажет ему, чему равно $ax + by + cz$. Как за два вопроса путник может угадать числа Сфинкса?

3. Назовём положительную числовую дробь *любопытной*, если сумма её числителя и знаменателя равна 2018. Всякую ли дробь можно выразить через любопытные с помощью сложения и вычитания?

4. Можно ли расставить по кругу натуральные числа от 1 до 30 (каждое должно встречаться один раз) таким образом, чтобы сумма любых двух соседних чисел делилась на следующее за ними по часовой стрелке?

5. Есть 30 шариков пятнадцати цветов (по два шарика каждого цвета). Они разложены по 15 мешкам. Известно, что можно вытащить из каждого мешка по одному шарику так, что все вытащенные 15 шариков будут разноцветные. Докажите, что число способов так вытащить 15 шариков есть ненулевая степень двойки.

6. Есть таблица 15×100 (15 столбцов, 100 строк). В каждой строке в каких-то двух клетках стоит по фишке. Каждая следующая строка отличается от предыдущей положением ровно одной фишки: та сдвигается либо вправо, либо влево на одну клетку. Докажите, что есть две строки, в которых фишки стоят на одинаковых позициях.

7. Аня нашла себе интересное занятие. Она написала на доске две единички, потом между ними написала их сумму. Ее это так захватило, что она продолжила: брала ряд чисел, который у нее получился на предыдущем шаге, и между двумя соседними числами писала их сумму (старые числа при этом не стирала). Сколько раз она выписала число 1000?