11 класс — ММОшный разнобой — 14 марта 2019

1. Существует ли такой квадратный трёхчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ с целыми коэффициентами и a, не кратным 2014, что все числа $f(1)$, $f(2)$, $\ldots$, $f(2014)$ имеют различные остатки при делении на 2014?

2. Найдите наименьшее натуральное число, десятичная запись квадрата которого оканчивается на 2016.

3. Незнайка знаком только с десятичными логарифмами и считает, что логарифм суммы двух чисел равен произведению их логарифмов, а логарифм разности двух чисел равен частному их логарифмов. Может ли Незнайка подобрать хотя бы одну пару чисел, для которой действительно верны одновременно оба этих равенства?

4. На основании AC равнобедренного треугольника ABC взяли произвольную точку X, а на боковых сторонах — точки P и Q так, что $XPBQ$ — параллелограмм. Докажите, что точка Y, симметричная точке X относительно PQ, лежит на описанной окружности треугольника ABC.

5. Три велосипедиста ездят в одном направлении по круглому треку длиной 300 метров. Каждый из них движется со своей постоянной скоростью, все скорости различны. Фотограф сможет сделать удачный снимок велосипедистов, если все они окажутся на каком-либо участке трека длиной d метров. При каком наименьшем d фотограф рано или поздно заведомо сможет сделать удачный снимок?

6. Можно ли так раскрасить все клетки бесконечной клетчатой плоскости в белый и чёрный цвета, чтобы каждая вертикальная прямая и каждая горизонтальная прямая пересекали конечное число белых клеток, а каждая наклонная прямая конечное число чёрных?

7. В английском клубе вечером собрались n его членов ($n \geqslant 3$). По традициям клуба каждый принес с собой сок того вида, который он предпочитает, в том количестве, которое он планирует выпить в течение вечера. Согласно правилам клуба, в любой момент любые три его члена могут присесть за столик и выпить сока (каждый — своего) в любом количестве, но обязательно все трое поровну. Докажите, что для того, чтобы все члены могли в течение вечера полностью выпить принесенный с собой сок, необходимо и достаточно, чтобы доля сока, принесенного каждым членом клуба, не превосходила одной трети от общего количества.

8. При какой перестановке $a_1, a_2, \ldots, a_{2011}$ чисел $1, 2, \ldots, 2011$ значение выражения

$$a_1^{a_2^{a_3^{\cdot^{\cdot^{a_{2010}^{a_{2011}}}}}}}$$

будет наибольшим?

11 класс — ММОшный разнобой — 14 марта 2019

1. Существует ли такой квадратный трёхчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ с целыми коэффициентами и a, не кратным 2014, что все числа $f(1)$, $f(2)$, $\ldots$, $f(2014)$ имеют различные остатки при делении на 2014?

2. Найдите наименьшее натуральное число, десятичная запись квадрата которого оканчивается на 2016.

3. Незнайка знаком только с десятичными логарифмами и считает, что логарифм суммы двух чисел равен произведению их логарифмов, а логарифм разности двух чисел равен частному их логарифмов. Может ли Незнайка подобрать хотя бы одну пару чисел, для которой действительно верны одновременно оба этих равенства?

4. На основании AC равнобедренного треугольника ABC взяли произвольную точку X, а на боковых сторонах — точки P и Q так, что $XPBQ$ — параллелограмм. Докажите, что точка Y, симметричная точке X относительно PQ, лежит на описанной окружности треугольника ABC.

5. Три велосипедиста ездят в одном направлении по круглому треку длиной 300 метров. Каждый из них движется со своей постоянной скоростью, все скорости различны. Фотограф сможет сделать удачный снимок велосипедистов, если все они окажутся на каком-либо участке трека длиной d метров. При каком наименьшем d фотограф рано или поздно заведомо сможет сделать удачный снимок?

6. Можно ли так раскрасить все клетки бесконечной клетчатой плоскости в белый и чёрный цвета, чтобы каждая вертикальная прямая и каждая горизонтальная прямая пересекали конечное число белых клеток, а каждая наклонная прямая конечное число чёрных?

7. В английском клубе вечером собрались n его членов ($n \geqslant 3$). По традициям клуба каждый принес с собой сок того вида, который он предпочитает, в том количестве, которое он планирует выпить в течение вечера. Согласно правилам клуба, в любой момент любые три его члена могут присесть за столик и выпить сока (каждый — своего) в любом количестве, но обязательно все трое поровну. Докажите, что для того, чтобы все члены могли в течение вечера полностью выпить принесенный с собой сок, необходимо и достаточно, чтобы доля сока, принесенного каждым членом клуба, не превосходила одной трети от общего количества.

8. При какой перестановке $a_1, a_2, \ldots, a_{2011}$ чисел $1, 2, \ldots, 2011$ значение выражения

$$a_1^{a_2^{a_3^{\cdot^{\cdot^{a_{2010}^{a_{2011}}}}}}}$$

будет наибольшим?