1. В вершинах правильного 2005-угольника записаны числа. Известно, что для любой вершины записанное в ней число не больше суммы чисел, записанных в двух соседних вершинах, и не меньше суммы чисел, записанных в двух наиболее удалённых от неё вершинах. Какие числа могли быть записаны?

2. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность Γ с центром в точке O. Его диагонали AC и BD перпендикулярны и пересекаются в точке P, причём точка O лежит внутри треугольника BPC. На отрезке BO выбрана точка H так, что $\angle BHP = 90°$. Окружность ω, описанная около треугольника PHD, вторично пересекает отрезок PC в точке Q. Докажите, что $AP = CQ$.

3. У геолога есть чашечные весы без гирь и 8 камней. Он хочет знать, верно ли, что два камня всегда тяжелее одного. Как ему гарантированно проверить это за 13 взвешиваний?

4. Пусть a, b и c — действительные числа, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} a+b+c=2, \\ a^2+b^2+c^2=2. \end{cases}$$

Докажите, что среди этих чисел найдутся два, отличающиеся менее чем на 1.

5. На доске написано уравнение

$$(x^2+*x+*)\cdot(x^2+*x+*)\cdot\ldots\cdot(x^2+*x+*) = (x^2+*x+*)\cdot(x^2+*x+*)\cdot\ldots\cdot(x^2+*x+*),$$

где в левой и правой частях по 10 квадратных трёхчленов. Два игрока по очереди заменяют коэффициенты $*$ на ненулевые действительные числа. Первый игрок выигрывает, если после последнего хода второго игрока получившееся уравнение имеет действительный корень, в противном случае выигрывает второй игрок. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?

11–2 Тренировочный вариант 24 января 2019

1. В вершинах правильного 2005-угольника записаны числа. Известно, что для любой вершины записанное в ней число не больше суммы чисел, записанных в двух соседних вершинах, и не меньше суммы чисел, записанных в двух наиболее удалённых от неё вершинах. Какие числа могли быть записаны?

2. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность Γ с центром в точке O. Его диагонали AC и BD перпендикулярны и пересекаются в точке P, причём точка O лежит внутри треугольника BPC. На отрезке BO выбрана точка H так, что $\angle BHP = 90°$. Окружность ω, описанная около треугольника PHD, вторично пересекает отрезок PC в точке Q. Докажите, что $AP = CQ$.

3. У геолога есть чашечные весы без гирь и 8 камней. Он хочет знать, верно ли, что два камня всегда тяжелее одного. Как ему гарантированно проверить это за 13 взвешиваний?

4. Пусть a, b и c — действительные числа, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} a+b+c=2, \\ a^2+b^2+c^2=2. \end{cases}$$

Докажите, что среди этих чисел найдутся два, отличающиеся менее чем на 1.

5. На доске написано уравнение

$$(x^2+*x+*)\cdot(x^2+*x+*)\cdot\ldots\cdot(x^2+*x+*) = (x^2+*x+*)\cdot(x^2+*x+*)\cdot\ldots\cdot(x^2+*x+*),$$

где в левой и правой частях по 10 квадратных трёхчленов. Два игрока по очереди заменяют коэффициенты $*$ на ненулевые действительные числа. Первый игрок выигрывает, если после последнего хода второго игрока получившееся уравнение имеет действительный корень, в противном случае выигрывает второй игрок. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?