

1. Квадратный трёхчлен  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , не имеющий корней, таков, что коэффициент  $b$  рационален, а среди чисел  $c$  и  $f(c)$  ровно одно иррационально. Может ли дискриминант трёхчлена  $f(x)$  быть рациональным?

2. Функция  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  такова, что при всех  $x, y \in \mathbb{R}$  верно равенство

$$f(x) + f(y) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) f\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

Обязательно ли функция  $f(x)$  — чётная?

3. Квадратный трёхчлен  $f(x)$  имеет два различных корня. Оказалось, что для любых чисел  $a$  и  $b$  верно неравенство  $f(a^2 + b^2) \geq f(2ab)$ . Докажите, что хотя бы один из корней этого трёхчлена — отрицательный.

4. Положительные  $x, y, z$  таковы, что  $xyz \geq xy + yz + zx$ . Докажите, что

$$\sqrt{xyz} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}.$$

5. Положительные  $a, b, c$  таковы, что  $ab + bc + ac = 1$ . Докажите, что

$$\sqrt{a + \frac{1}{a}} + \sqrt{b + \frac{1}{b}} + \sqrt{c + \frac{1}{c}} \geq 2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}).$$

6. Учитель собирается дать детям задачу следующего вида. Он сообщит им, что он задумал многочлен  $P(x)$  степени 2019 с целыми коэффициентами, старший коэффициент которого равен 1. Затем он сообщит им  $k$  целых чисел  $n_1, n_2, \dots, n_k$  и отдельно сообщит значение выражения  $P(n_1)P(n_2) \dots P(n_k)$ . По этим данным дети должны найти многочлен, который мог бы задумать учитель. При каком наименьшем  $k$  учитель сможет составить задачу такого вида так, чтобы многочлен, найденный детьми, обязательно совпал бы с задуманным?

7. У многочлена  $P(x) = a_{2n}x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \dots + a_1x + a_0$  все коэффициенты лежат на отрезке  $[100, 101]$ . При каком наименьшем  $n$  у такого многочлена может быть действительный корень?

8. Натуральное число  $N$  представляется в виде

$$N = a_1 - a_2 = b_1 - b_2 = c_1 - c_2 = d_1 - d_2,$$

где  $a_1$  и  $a_2$  — квадраты,  $b_1$  и  $b_2$  — кубы,  $c_1$  и  $c_2$  — пятые степени, а  $d_1$  и  $d_2$  — седьмые степени натуральных чисел. Обязательно ли среди чисел  $a_1, b_1, c_1$  и  $d_1$  найдутся два равных?

1. Квадратный трёхчлен  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , не имеющий корней, таков, что коэффициент  $b$  рационален, а среди чисел  $c$  и  $f(c)$  ровно одно иррационально. Может ли дискриминант трёхчлена  $f(x)$  быть рациональным?

2. Функция  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  такова, что при всех  $x, y \in \mathbb{R}$  верно равенство

$$f(x) + f(y) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) f\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

Обязательно ли функция  $f(x)$  — чётная?

3. Квадратный трёхчлен  $f(x)$  имеет два различных корня. Оказалось, что для любых чисел  $a$  и  $b$  верно неравенство  $f(a^2 + b^2) \geq f(2ab)$ . Докажите, что хотя бы один из корней этого трёхчлена — отрицательный.

4. Положительные  $x, y, z$  таковы, что  $xyz \geq xy + yz + zx$ . Докажите, что

$$\sqrt{xyz} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}.$$

5. Положительные  $a, b, c$  таковы, что  $ab + bc + ac = 1$ . Докажите, что

$$\sqrt{a + \frac{1}{a}} + \sqrt{b + \frac{1}{b}} + \sqrt{c + \frac{1}{c}} \geq 2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}).$$

6. Учитель собирается дать детям задачу следующего вида. Он сообщит им, что он задумал многочлен  $P(x)$  степени 2019 с целыми коэффициентами, старший коэффициент которого равен 1. Затем он сообщит им  $k$  целых чисел  $n_1, n_2, \dots, n_k$  и отдельно сообщит значение выражения  $P(n_1)P(n_2) \dots P(n_k)$ . По этим данным дети должны найти многочлен, который мог бы задумать учитель. При каком наименьшем  $k$  учитель сможет составить задачу такого вида так, чтобы многочлен, найденный детьми, обязательно совпал бы с задуманным?

7. У многочлена  $P(x) = a_{2n}x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \dots + a_1x + a_0$  все коэффициенты лежат на отрезке  $[100, 101]$ . При каком наименьшем  $n$  у такого многочлена может быть действительный корень?

8. Натуральное число  $N$  представляется в виде

$$N = a_1 - a_2 = b_1 - b_2 = c_1 - c_2 = d_1 - d_2,$$

где  $a_1$  и  $a_2$  — квадраты,  $b_1$  и  $b_2$  — кубы,  $c_1$  и  $c_2$  — пятые степени, а  $d_1$  и  $d_2$  — седьмые степени натуральных чисел. Обязательно ли среди чисел  $a_1, b_1, c_1$  и  $d_1$  найдутся два равных?