

1. Точка D на стороне BC остроугольного треугольника ABC такова, что $AB = AD$. Окружность, описанная около треугольника ABD , пересекает сторону AC в точках A и K . Прямая DK пересекает перпендикуляр, опущенный из B на AC , в точке L . Докажите, что $CL = BC$.

2. Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность ω . Касательные к ω , проведенные через точки B и C , пересекают касательную к ω , проведенную через точку A , в точках K и L соответственно. Прямая, проведенная через K параллельно AB , пересекается с прямой, проведенной через L параллельно AC , в точке P . Докажите, что $BP = CP$.

3. В боковых гранях тетраэдра провели по две высоты из вершин при основании тетраэдра. Затем в плоскостях боковых граней провели прямые, соединяющие основания этих высот. Докажите, что полученные три прямые параллельны одной плоскости.

4. Окружность пересекает каждую сторону ромба в двух точках и делит её на три отрезка. Обойдём контур ромба, начав с какой-нибудь вершины, по часовой стрелке, и покрасим три отрезка каждой стороны последовательно в белый, синий и красный цвета. Докажите, что сумма длин белых отрезков равна сумме длин красных отрезков.

5. В треугольнике ABC проведена биссектриса BL . На отрезке CL выбрана точка M . Касательная в точке B к окружности Ω , описанной около треугольника ABC , пересекает луч CA в точке P . Касательные в точках B и M к окружности Γ , описанной около треугольника BLM , пересекаются в точке Q . Докажите, что прямые PQ и BL параллельны.

6. На плоскости даны точки A и B , а также прямая l , проходящая через точку B . Рассмотрим произвольную окружность ω , касающуюся прямой l в точке B и не содержащую внутри себя точку A . Касательные к ω , проведённые из точки A , касаются ω в точках X и Y . Докажите, что прямая XY проходит через фиксированную точку, не зависящую от выбора окружности ω .

7. Продолжения медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекают его описанную окружность в точках A_0 , B_0 и C_0 соответственно. Оказалось, что площади треугольников ABC_0 , AB_0C и A_0BC равны. Докажите, что треугольник ABC равносторонний.

8. В окружности ω с центром в точке O провели непересекающиеся хорды AB и CD так, что $\angle AOB = \angle COD = 120^\circ$. Касательная к ω в точке A пересекает луч CD в точке X , а касательная к ω в точке B пересекает луч DC в точке Y . Прямая l проходит через центры окружностей, описанных около треугольников DOX и COY . Докажите, что l касается ω .

1. Точка D на стороне BC остроугольного треугольника ABC такова, что $AB = AD$. Окружность, описанная около треугольника ABD , пересекает сторону AC в точках A и K . Прямая DK пересекает перпендикуляр, опущенный из B на AC , в точке L . Докажите, что $CL = BC$.

2. Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность ω . Касательные к ω , проведенные через точки B и C , пересекают касательную к ω , проведенную через точку A , в точках K и L соответственно. Прямая, проведенная через K параллельно AB , пересекается с прямой, проведенной через L параллельно AC , в точке P . Докажите, что $BP = CP$.

3. В боковых гранях тетраэдра провели по две высоты из вершин при основании тетраэдра. Затем в плоскостях боковых граней провели прямые, соединяющие основания этих высот. Докажите, что полученные три прямые параллельны одной плоскости.

4. Окружность пересекает каждую сторону ромба в двух точках и делит её на три отрезка. Обойдём контур ромба, начав с какой-нибудь вершины, по часовой стрелке, и покрасим три отрезка каждой стороны последовательно в белый, синий и красный цвета. Докажите, что сумма длин белых отрезков равна сумме длин красных отрезков.

5. В треугольнике ABC проведена биссектриса BL . На отрезке CL выбрана точка M . Касательная в точке B к окружности Ω , описанной около треугольника ABC , пересекает луч CA в точке P . Касательные в точках B и M к окружности Γ , описанной около треугольника BLM , пересекаются в точке Q . Докажите, что прямые PQ и BL параллельны.

6. На плоскости даны точки A и B , а также прямая l , проходящая через точку B . Рассмотрим произвольную окружность ω , касающуюся прямой l в точке B и не содержащую внутри себя точку A . Касательные к ω , проведённые из точки A , касаются ω в точках X и Y . Докажите, что прямая XY проходит через фиксированную точку, не зависящую от выбора окружности ω .

7. Продолжения медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекают его описанную окружность в точках A_0 , B_0 и C_0 соответственно. Оказалось, что площади треугольников ABC_0 , AB_0C и A_0BC равны. Докажите, что треугольник ABC равносторонний.

8. В окружности ω с центром в точке O провели непересекающиеся хорды AB и CD так, что $\angle AOB = \angle COD = 120^\circ$. Касательная к ω в точке A пересекает луч CD в точке X , а касательная к ω в точке B пересекает луч DC в точке Y . Прямая l проходит через центры окружностей, описанных около треугольников DOX и COY . Докажите, что l касается ω .