

1. Арифметическая прогрессия состоит из целых чисел. Сумма первых n членов этой прогрессии является степенью двойки. Докажите, что n — также степень двойки.

2. Игральный кубик имеет 6 граней с цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6. Сколько различных игральных кубиков существует, если считать различными два кубика, которые нельзя спутать, как ни переворачивай?

3. Внутри треугольника ABC отмечена точка P . Биссектрисы углов BAC и ACP пересекаются в точке M , а биссектриса угла PBA и прямая, содержащая биссектрису угла BPC , пересекаются в точке N . Докажите, что точка пересечения прямых CP и AB лежит на прямой MN .

4. Квадрат со стороной 7 клеток полностью замостили трёхклеточными уголками и пятиклеточными крестиками. Какое наибольшее количество крестиков могло быть использовано?

5. В остроугольном треугольнике ABC проведена медиана BM . Точки P и Q — центры вписанных окружностей треугольников ABM и CBM соответственно. Докажите, что вторая точка пересечения описанных окружностей треугольников ABP и CBQ лежит на отрезке BM .

6. В каждой клетке квадрата 111×111 , кроме центральной, стоит один из двух знаков: «поворот» или «прямо». Робот въезжает извне в произвольную клетку на границе квадрата, после чего ползает параллельно сторонам клеток, придерживаясь двух правил:

- 1) в клетке со знаком «прямо» он продолжает путь в том же направлении;
- 2) в клетке со знаком «поворот» он поворачивает на 90° (в любую сторону по своему выбору).

Центральную клетку квадрата занимает дом. Можно ли расставить знаки так, чтобы робот не смог врезаться в него?

7. Докажите, что не существует многочлена от двух переменных $P(x, y)$, для которого множеством решений неравенства $P(x, y) > 0$ является квадрат $\{(x, y) : x > 0, y > 0\}$.

1. Арифметическая прогрессия состоит из целых чисел. Сумма первых n членов этой прогрессии является степенью двойки. Докажите, что n — также степень двойки.

2. Игральный кубик имеет 6 граней с цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6. Сколько различных игральных кубиков существует, если считать различными два кубика, которые нельзя спутать, как ни переворачивай?

3. Внутри треугольника ABC отмечена точка P . Биссектрисы углов BAC и ACP пересекаются в точке M , а биссектриса угла PBA и прямая, содержащая биссектрису угла BPC , пересекаются в точке N . Докажите, что точка пересечения прямых CP и AB лежит на прямой MN .

4. Квадрат со стороной 7 клеток полностью замостили трёхклеточными уголками и пятиклеточными крестиками. Какое наибольшее количество крестиков могло быть использовано?

5. В остроугольном треугольнике ABC проведена медиана BM . Точки P и Q — центры вписанных окружностей треугольников ABM и CBM соответственно. Докажите, что вторая точка пересечения описанных окружностей треугольников ABP и CBQ лежит на отрезке BM .

6. В каждой клетке квадрата 111×111 , кроме центральной, стоит один из двух знаков: «поворот» или «прямо». Робот въезжает извне в произвольную клетку на границе квадрата, после чего ползает параллельно сторонам клеток, придерживаясь двух правил:

- 1) в клетке со знаком «прямо» он продолжает путь в том же направлении;
- 2) в клетке со знаком «поворот» он поворачивает на 90° (в любую сторону по своему выбору).

Центральную клетку квадрата занимает дом. Можно ли расставить знаки так, чтобы робот не смог врезаться в него?

7. Докажите, что не существует многочлена от двух переменных $P(x, y)$, для которого множеством решений неравенства $P(x, y) > 0$ является квадрат $\{(x, y) : x > 0, y > 0\}$.